

UC | Chile

Termodinámica (FIS1523)

Calores específicos (cont.)

Felipe Isaule
felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 7 de Mayo de 2025

Resumen clase anterior

- Definimos los **calores específicos**:

$$c_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V, \quad c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P.$$

- Vimos que, en **gases ideales**, los calores específicos se encuentran **tabulados**, además de contar con **ajustes analíticos**.

Clase 16: Calores específicos (cont.)

- Gases monoatómicos y diatómicos.
- Expansión adiabática.

- Bibliografía recomendada:
 - Halliday (19-4, 19-8, 19-9).

Clase 16: Calores específicos (cont.)

- **Gases monoatómicos y diatómicos.**
- Expansión adiabática.

Calores específicos en gases ideales

- En la clase anterior vimos que en **gases ideales** se cumple que:

$$c_P = c_V + R.$$

- Además, definimos la **relación entre los calores específicos**:

$$k = \frac{c_P}{c_V}.$$

- Podemos escribir:

- $\frac{c_P}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V} \quad \longrightarrow \quad c_V = \frac{R}{k - 1}.$

- $1 = \frac{c_V}{c_P} + \frac{R}{c_P} \quad \longrightarrow \quad c_P = \frac{R}{1 - 1/k}.$

Gases monoatómicos

- Se ha demostrado que en gases ideales **monoatómicos**:

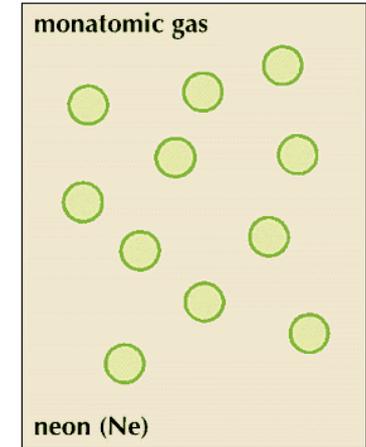
$$k = 5/3.$$

- Entonces, los **calores específicos**:

$$c_V = \frac{R}{k - 1} \quad \longrightarrow \quad c_V = \frac{3R}{2}.$$
$$c_P = \frac{R}{1 - 1/k} \quad \longrightarrow \quad c_P = \frac{5R}{2}.$$

- El **cambio de energía interna específica**:

$$\Delta u = c_V \Delta T \quad \longrightarrow \quad \Delta u = \frac{3}{2} R \Delta T.$$

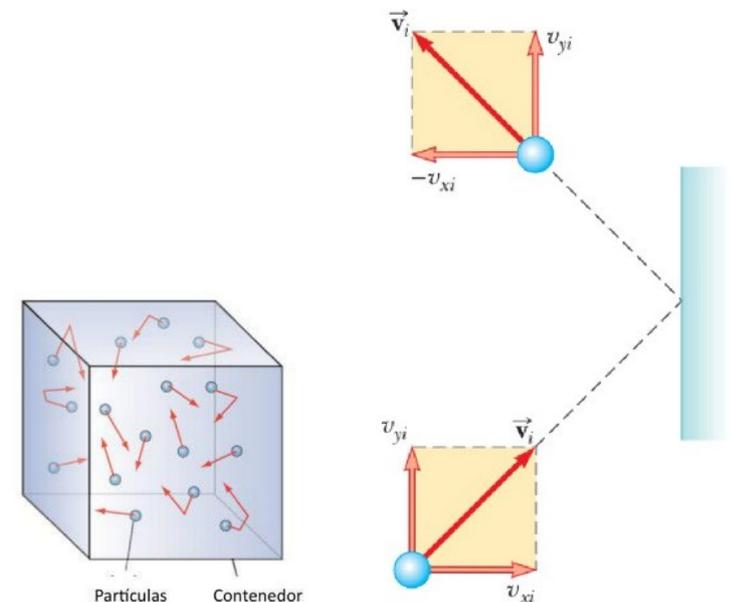


Gases monoatómicos

- La fórmula anterior se puede obtener de manera rigurosa de **manera microscópica**.
- De manera microscópica y **clásica**, cada partícula obedece las **leyes de Newton**.
- Un **gas monoatómico** tiene **tres grados de libertad**. Cada uno está asociada a la **energía cinética en cada dirección**:

$$E = \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_y^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_z^2 \rangle.$$

$\langle v_i \rangle$: Rapidez promedio dirección i .



Gases monoatómicos

- El teorema de equipartición de la energía dicta que cada grado de libertad aporta una energía:

$$E_i = \frac{m_0}{2} \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

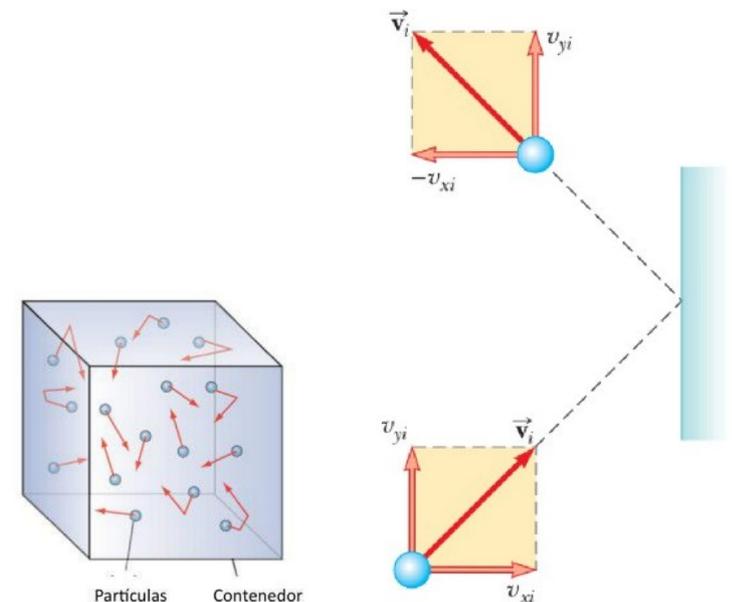
Constante de Boltzmann:

$$k_B = 1.380649 \times 10^{23} \text{ J } ^\circ\text{K}^{-1}$$

- Debido a los tres grados de libertad:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{3}{2} N_A k_B \Delta T \\ &= \frac{3}{2} R \Delta T \end{aligned}$$

N_A : Número de Avogadro



Gases diatómicos

- En gases ideales **diatómicos**:

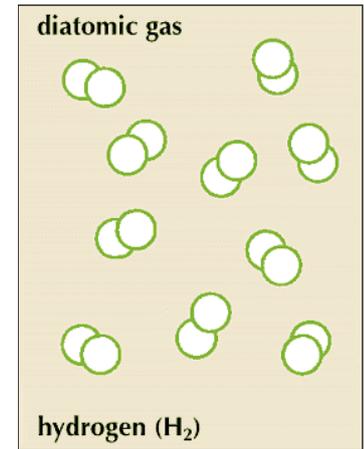
$$k = 7/5.$$

- Entonces, los **calores específicos**:

$$c_V = \frac{R}{k - 1} \quad \longrightarrow \quad c_V = \frac{5R}{2}.$$
$$c_P = \frac{R}{1 - 1/k} \quad \longrightarrow \quad c_P = \frac{7R}{2}.$$

- El **cambio de energía interna específica**:

$$\Delta u = c_V \Delta T \quad \longrightarrow \quad \Delta u = \frac{5}{2} R \Delta T.$$



Gases diatómicos

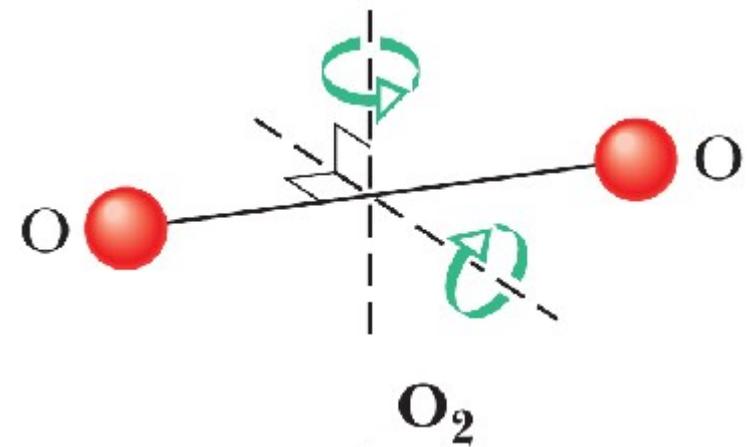
- Los **gases diatómicos** tienen **cinco grados de libertad**. Los dos adicionales son debido a la **rotación**:

$$E = \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_y^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_z^2 \rangle + \frac{I_{0,y}}{2} \langle \omega_y^2 \rangle + \frac{I_{0,z}}{2} \langle \omega_z^2 \rangle.$$

$\langle \omega_i \rangle$: Rapidez angular promedio dirección i .

- Por el **teorema de equipartición**:

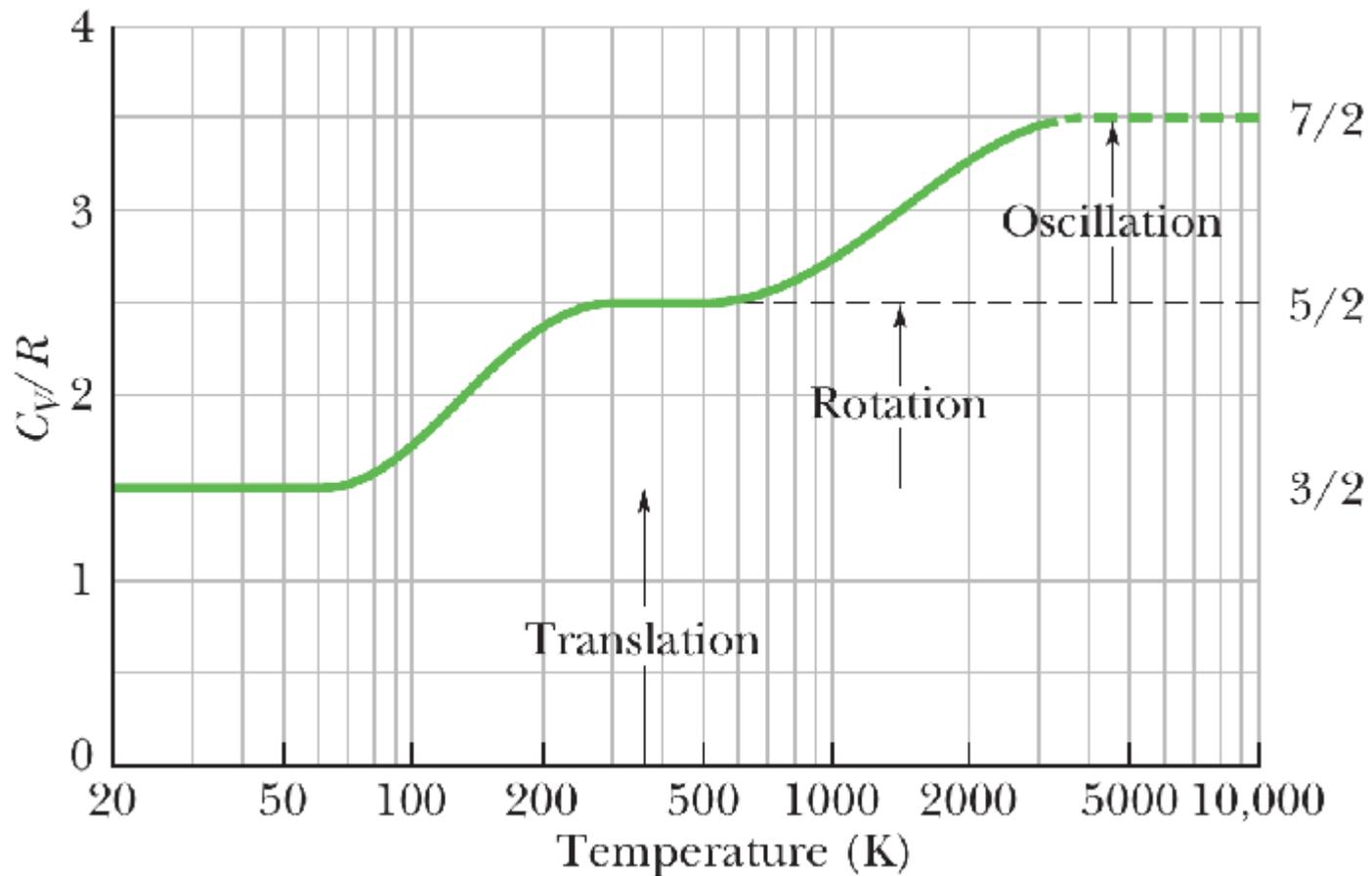
$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{5}{2} N_A k_B \Delta T \\ &= \frac{5}{2} R \Delta T \end{aligned}$$



Gases diatómicos

- Descripciones más realistas incluyen grados de libertad adicionales, tales como **vibraciones**.

C_V para gases diatómicos.



Gases poliatómicos

- Algunos gases ideales compuestos por **moléculas poliatómicas** tienen **seis grados de libertad**:

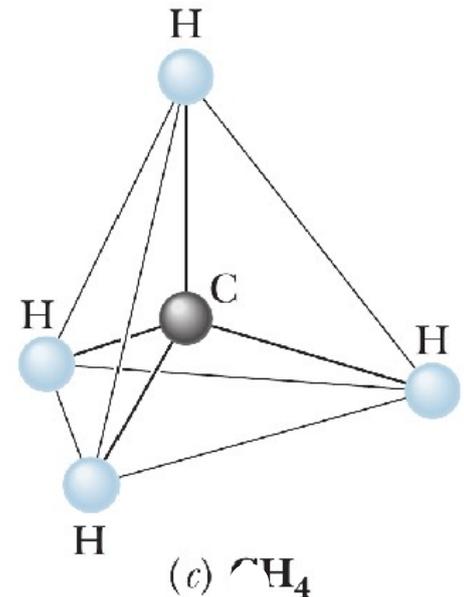
$$E = \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_y^2 \rangle + \frac{m_0}{2} \langle v_z^2 \rangle + \frac{I_{0,x}}{2} \langle \omega_x^2 \rangle + \frac{I_{0,y}}{2} \langle \omega_y^2 \rangle + \frac{I_{0,z}}{2} \langle \omega_z^2 \rangle.$$

- En este caso:

$$c_V = 3R, \quad c_P = 4R.$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \Delta u &= 3N_A k_B \Delta T \\ &= 3R \Delta T \end{aligned}$$

- Sin embargo, dependiendo de la molécula, gases poliatómicos pueden ser mucho más complejos de analizar.



Clase 16: Calores específicos (cont.)

- Gases monoatómicos y diatómicos.
- **Expansión adiabática.**

Procesos adiabáticos

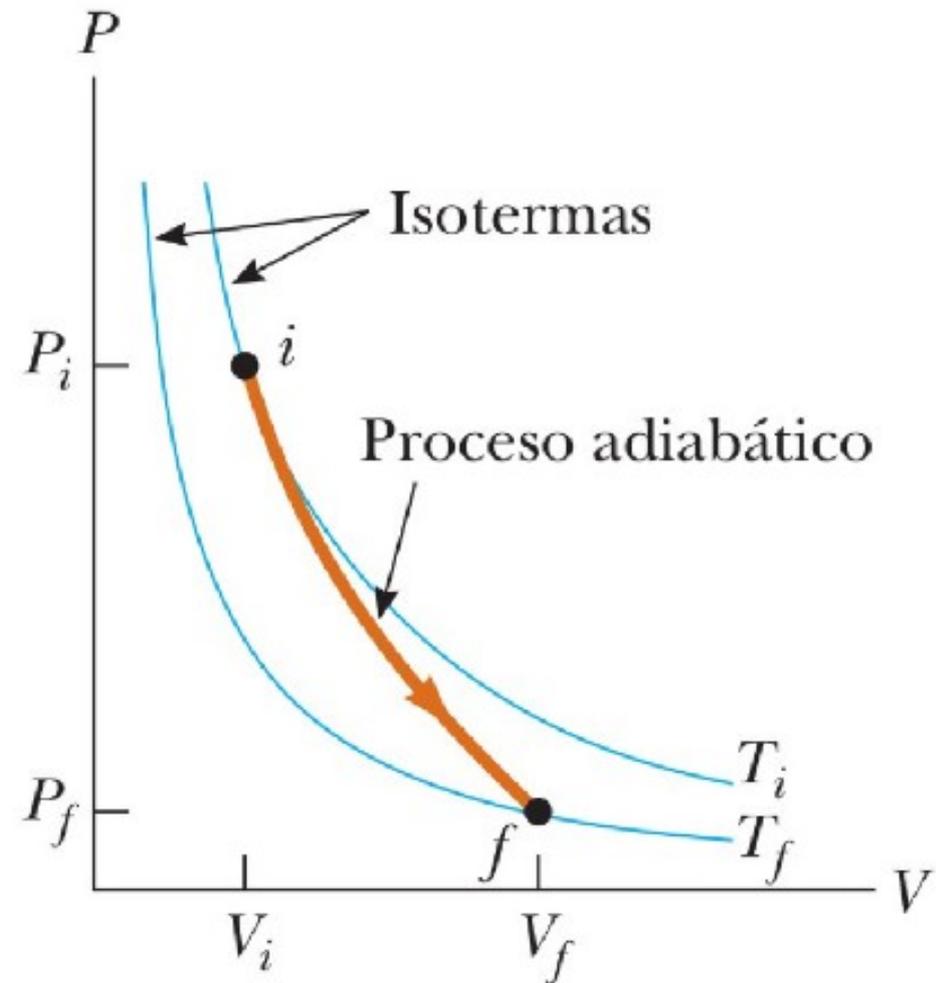
- Recordemos que los **procesos adiabáticos** son aquellos en donde **no hay intercambio de calor**:

$$\longrightarrow Q = 0.$$

- Por tanto:

$$\Delta U = \cancel{Q} + W = W$$

$$W = -PdV \longrightarrow dU = -PdV.$$



Procesos adiabáticos en gases ideales

- Por un lado, el **cambio de energía** lo podemos escribir como:

$$dU = mc_V dT = -PdV.$$

- Por otro lado, de la ecuación de estado de gases ideales:

$$PV = mRT \quad \longrightarrow \quad PdV + VdP = mRdT.$$

$$\longrightarrow \quad dT = \frac{PdV + VdP}{mR}$$

- Volviendo a la primera ecuación:

$$mc_V dT = -PdV.$$

$$mc_V \frac{PdV + VdP}{mR} = -PdV.$$

$$PdV + VdP = -\frac{R}{c_V} PdV.$$

Procesos adiabáticos en gases ideales

- Ahora, recordamos que en un **gas ideal** se cumple que:

$$c_P = c_V + R \quad \longrightarrow \quad R = c_P - c_V$$

- Remplazando:

$$PdV + VdP = -\frac{R}{c_V}PdV$$

$$PdV + VdP = -\frac{c_P - c_V}{c_V}PdV$$

- Ahora utilizamos la **razón de calores específicos**:

$$k = \frac{c_P}{c_V} \quad \longrightarrow \quad PdV + VdP = (1 - k)PdV$$

$$VdP = -kPdV$$

$$\frac{dP}{P} = -k \frac{dV}{V}$$

Procesos adiabáticos en gases ideales

- Ahora integramos la ecuación:

$$\int \frac{dP}{P} = -k \int \frac{dV}{V}$$

$$\ln P = -k \ln V + \text{cte}$$

$$\ln P = -\ln V^k + \text{cte}$$

$$\ln(PV^k) = \text{cte}$$

$$PV^k = \exp(\text{cte})$$

- Al darnos cuenta que $\exp(\text{cte})$ también es una constante, obtenemos que:

$$PV^k = \text{cte}$$

Procesos adiabáticos en gases ideales

- De la ecuación anterior:

$$P = \frac{\text{cte}}{V^k}$$

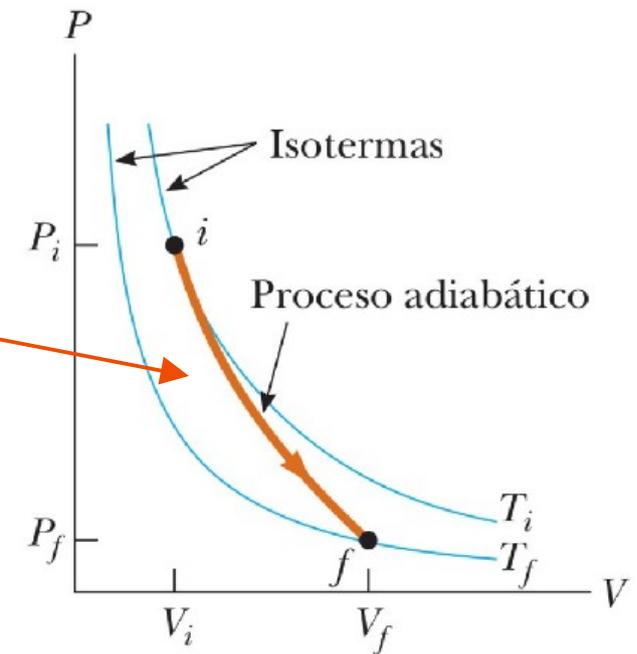
- **Dos instantes en un mismo proceso adiabático** cumplen que:

$$P_1 V_1^k = P_2 V_2^k.$$

- Además, utilizando que $PV = nR_u T$:

$$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1},$$

$$P_1^{1-k} T_1^k = P_2^{1-k} T_2^k.$$



Ejemplo 1:

- **Inicialmente**, el gas en una botella cerrada de champagne (principalmente CO_2) se encuentra a una **presión** de **5 atm** y a una **temperatura** de **5°C**. Cuando la botella es abierta, el gas se **expande adiabáticamente** hasta **alcanzar la presión atmosférica**. Asumiendo un **gas ideal** y que el **radio entre los calores específicos** es $k=4/3$, encuentre la **temperatura final** del gas.

Ejemplo 1:

- **Inicialmente**, el gas en una botella cerrada de champagne (principalmente CO_2) se encuentra a una **presión** de **5 atm** y a una **temperatura** de **5°C**. Cuando la botella es abierta, el gas se **expande adiabáticamente** hasta **alcanzar la presión atmosférica**. Asumiendo un **gas ideal** y que el **radio entre los calores específicos** es $k=4/3$, encuentre la **temperatura final** del gas.

Utilizamos que los instantes iniciales y finales cumplen que:

$$P_1^{1-k} T_1^k = P_2^{1-k} T_2^k.$$

Despejamos la temperatura final:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-k}{k}}$$

Remplazando con los datos del enunciado:

$$T_2 = (5 + 273) \text{°K} \left(\frac{5 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} \right)^{\frac{1-4/3}{4/3}}$$

$$= 278 \text{°K} 5^{-1/4}$$

$$= 185.9 \text{°K}$$

$$\longrightarrow \boxed{T_2 = -87.1 \text{°C}}$$

No es muy realista el problema!
¿Dónde está el problema?

Ejemplo 2:

- Un **gas ideal diatómico** tiene **inicialmente** una **presión** de **2.0×10^5 Pa** y un **volumen** de **$4.0 \times 10^{-6} \text{m}^3$** . Si el gas se expande **adiabáticamente** hasta un **volumen** de **$8.0 \times 10^{-6} \text{m}^3$** , encuentre el **trabajo realizado** y el **cambio de energía interna**.

Ejemplo 2:

- Un **gas ideal diatómico** tiene **inicialmente** una **presión** de 2.0×10^5 Pa y un **volumen** de $4.0 \times 10^{-6} \text{m}^3$. Si el gas se expande **adiabáticamente** hasta un **volumen** de $8.0 \times 10^{-6} \text{m}^3$, encuentre el **trabajo realizado** y el **cambio de energía interna**.

En un instante cualquiera:

$$PV^k = P_i V_i^k$$
$$\longrightarrow P = \frac{P_i V_i^k}{V^k}$$

Entonces, el trabajo realizado:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{P_i V_i^k}{V^k} dV$$
$$= P_i V_i^k \frac{V^{-k+1}}{-k+1} \Big|_{V_i}^{V_f}$$
$$= P_i V_i^k \frac{V_f^{1-k} - V_i^{1-k}}{1-k}$$

Ahora utilizamos que en un gas diatómico:

$$k = 7/5$$

Utilizando los datos del enunciado:

$$P_i = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_i = 5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$V_f = 8 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Se obtiene:

$$\longrightarrow \boxed{W = 0.48 \text{ J}}$$

Finalmente, como es un proceso adiabático:

$$\Delta U = -W \longrightarrow \boxed{\Delta U = -0.48 \text{ J}}$$

Expansión libre adiabática

- Es importante notar que las **ecuaciones anteriores no son válidas** para el caso particular de una **expansión libre**.
- Lo anterior es debido a que en una expansión libre **no se realiza trabajo**.
- Por tanto, las ecuaciones anteriores no se pueden utilizar.

Conclusiones

- Revisamos los calores específicos para **gases ideales monoatómicos y diatómicos**.
- Examinamos la **expansión adiabática en gases ideales**.
- Próxima clase:
 - Sistemas abiertos.