UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

FISICA I (FIS101)

Clase 9&10

Repaso cinemática en 2D

Felipe Isaule

felipeisaule.github.io

felipe.isaule.r@edu.uai.cl

Jueves 2 de Abril de 2026

Cambio de profesor:

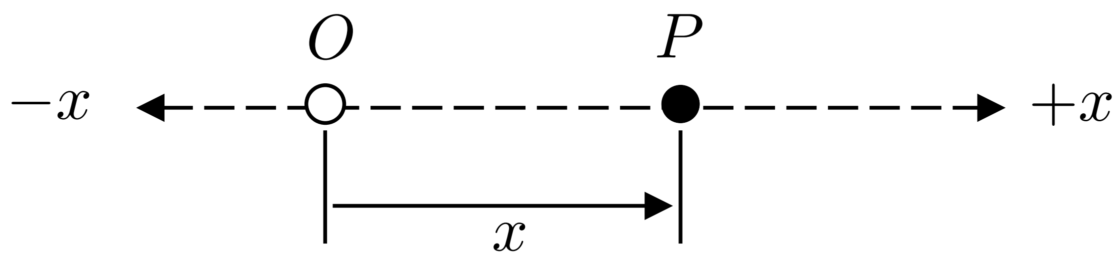
- **Nuevo profesor**: Felipe Isaule
- Consultas las pueden realizar via WebC o e-mail a felipe.isaule.r@edu.uai.cl.
- **Reglas del curso** seguirán siendo las **mismas**.

Recordatorio

- El **primer control** se realizará el próximo **jueves 9 de Abril** en el **primer módulo**.
- Se evaluará **cinemática en 1D** (guías 1, 2 y 3), con excepción de caída libre.
- Informe del **laboratorio 1** se entrega hasta las **22:00** del **martes 14 de Abril**. Se permitirá entrega atrasada hasta una semana después con nota máxima 5.0.

Repaso cinemática en 1D

- La **posición** $x(t)$ de una partícula con respecto a un **punto de referencia** es simplemente su distancia y dirección.



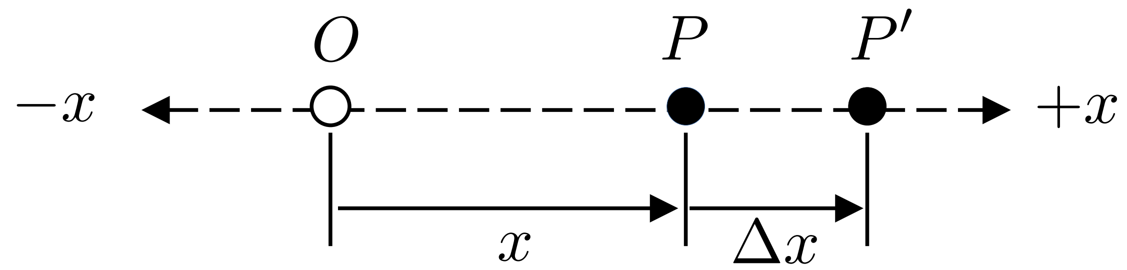
- La **magnitud** del **desplazamiento** entre dos puntos 1 y 2 es simplemente

$$\Delta x = |x_2 - x_1|.$$

Repaso cinemática en 1D

- La **velocidad media** de un movimiento rectilíneo

$$v_{\text{media}} = \Delta x / \Delta t.$$



- La **velocidad instantánea**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.}$$

- De manera análoga, la **aceleración media**

$$a_{\text{media}} = \Delta v / \Delta t.$$

- Mientras que la **aceleración instantánea**

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \qquad a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}.}$$

Repaso cinemática en 1D

- El **movimiento uniformemente acelerado** (MUA) está descrito por:

$$v_f = v_i + a\,t\,,$$

$$\frac{v_f^2}{2} = \frac{v_i^2}{2} + a(x_f - x_i)\,,$$

$$x_f = x_i + v_i\,t + \frac{1}{2}at^2\,. \qquad a = \mathrm{cte.}$$

- En una **caída libre**, si tomamos el **eje positivo hacia arriba**, entonces $a{=}-g{=}-9.8\ \mathrm{m/s^2}$. Al ser un movimiento vertical, la posición usualmente se denota y en vez de x.

Preparación control 1

- Se evaluará **cinemática en 1D**.
- Recordar estudiar:
  - Definiciones de la posición, velocidad y aceleración.
  - Interpretaciones gráficas.
  - Ecuaciones de MUA y caída libre.
  - Derivadas!
- No olvidar unidades y recordar hacer análisis dimensional.

Clase 9 & 10

- Clase 9:
  - Vectores en 2D.
  - Movimiento parabólico.
- Clase 10:
  - Movimiento circular.

- Bibliografía recomendada:
  - Serway (4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5).

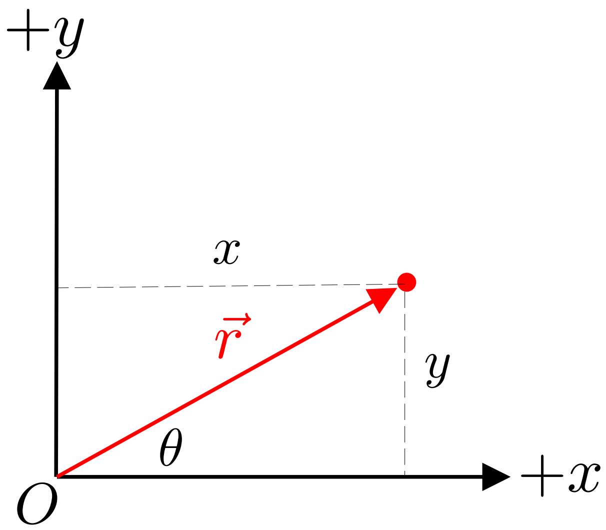
Clase 9 & 10

- Clase 9:
  - **Vectores en 2D**.
  - Movimiento parabólico.
- Clase 10:
  - Movimiento circular.

Cinemática en 2D

- En **coordenadas cartesianas** (rectangulares), la **posición** está dictada por el siguiente **vector**:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



- De la **trigonometría**, tenemos las siguientes relaciones:

$$\sin\theta = y/r\,,$$

$$\cos\theta = x/r\,,$$

$$\tan\theta = y/x\,,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cinemática en 2D

- La **velocidad instantánea** está dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{j}.$$

- Así, la **magnitud** esta velocidad, llamada **rapidez**, es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

- Por otra parte, la **aceleración instantánea**:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}\hat{j}.$$

Cinemática en 2D

- Importante: La **descripción** en **cada coordenada** se puede tratar como una **ecuación independiente**.
- En cinemática 2D, es usual tener que resolver un **sistema de ecuaciones**.

  Ejemplo:

$$(A+B)\hat{i} + C\hat{j} = D^2\hat{i} + (E-2F)\hat{j}$$

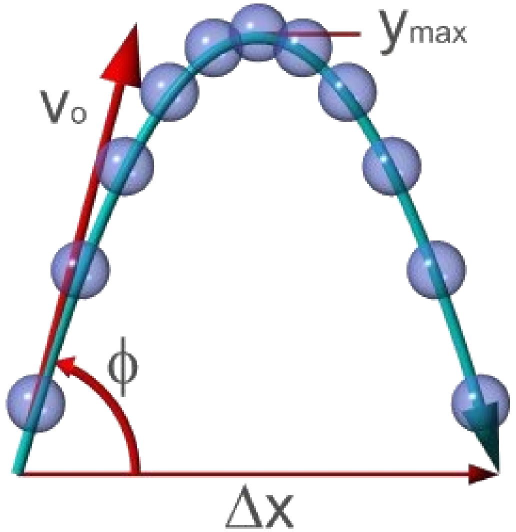
$$\longrightarrow \qquad \begin{aligned} (A+B) &= D^2 \\ C &= E-2F \end{aligned}$$

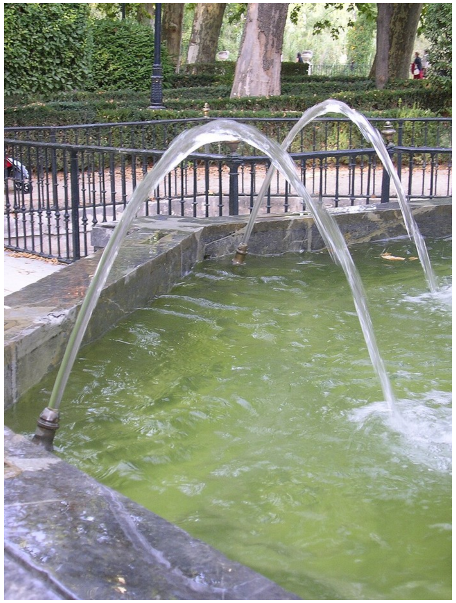
Clase 9 & 10

- Clase 9:
  - Vectores en 2D.
  - **Movimiento parabólico.**
- Clase 10:
  - Movimiento circular.

Lanzamiento de un proyectil

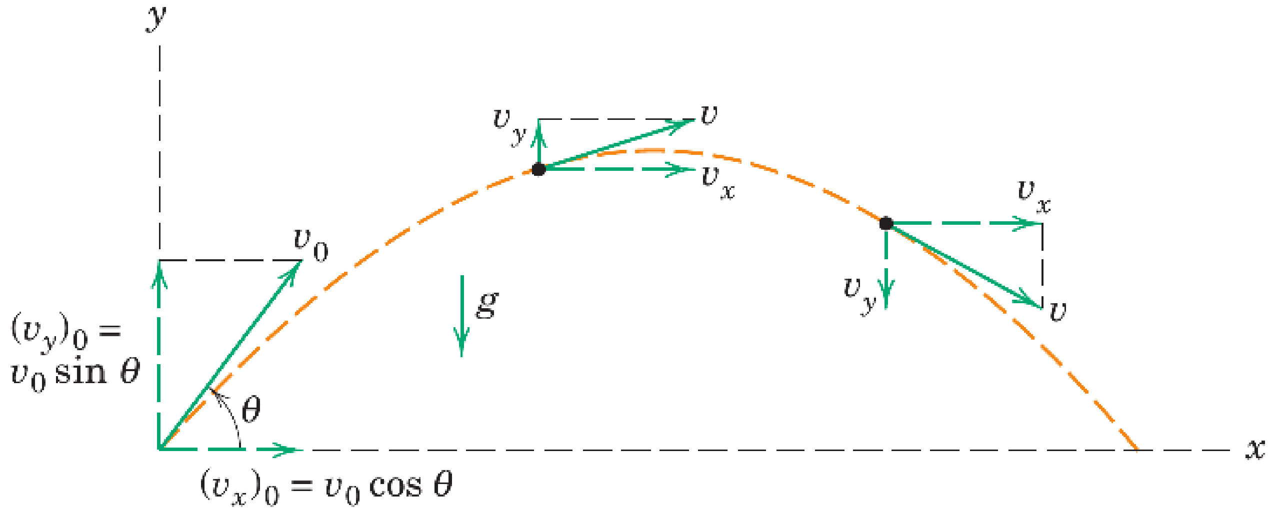
- El **lanzamiento de un proyectil** es uno de los ejemplos fundamentales de la cinemática.
- Se describe en **dos dimensiones** utilizando las ecuaciones de **movimiento uniformemente acelerado** para cada coordenada.
- Se caracteriza por mostrar un **movimiento parabólico** en un plano.





Ejemplo 1: Lanzamiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



Ejemplo 1: Lanzamiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?

La aceleración es nula en el eje *x*, y constante hacia la superficie en el eje *y*:

$$a_x = 0\,, \qquad a_y = -g$$

La velocidad es un movimiento con aceleración constante en cada componente:

$$\longrightarrow \quad v_x = v_{x,0}$$
$$\longrightarrow \quad v_y = v_{y,0} - gt$$

Mientras que la posición:

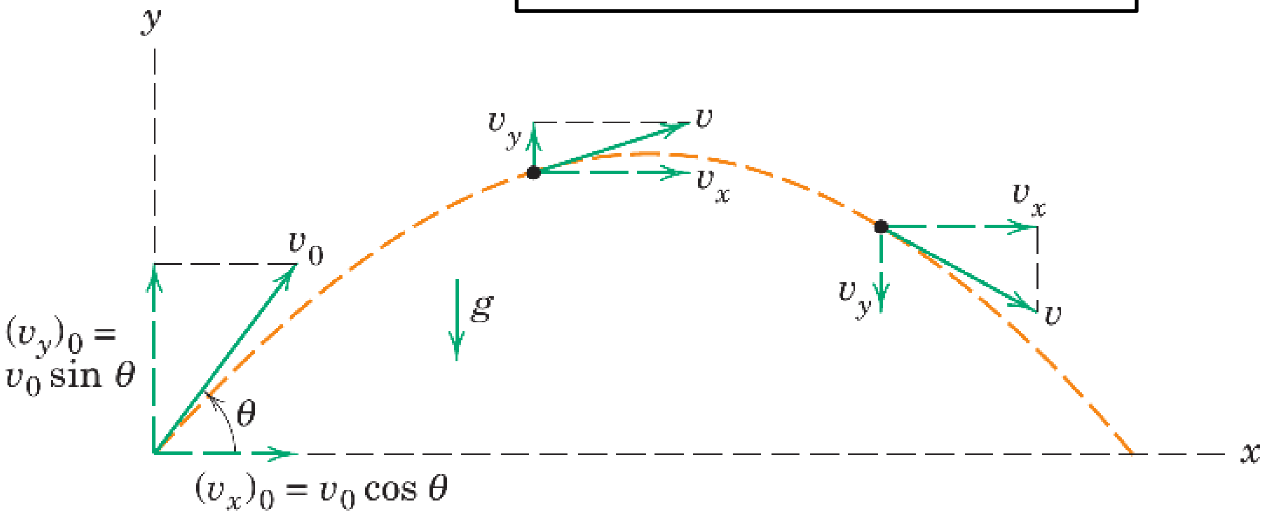
$$\longrightarrow \quad x = x_0 + v_{x,0}\, t$$
$$\longrightarrow \quad y = y_0 + v_{y,0}\, t - gt^2/2$$

También podemos escribir:

$$\longrightarrow \quad v_y^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y - y_0)$$

En este ejemplo:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{y,0} = v_0 \sin\theta$$
$$x_0 = y_0 = 0$$



Ejemplo 1: Lanzamiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.

La **cima** se alcanza cuando la **velocidad vertical** es cero. La aceleración vertical sigue siendo -*g*.

$$v_y^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y - y_0) \longrightarrow$$

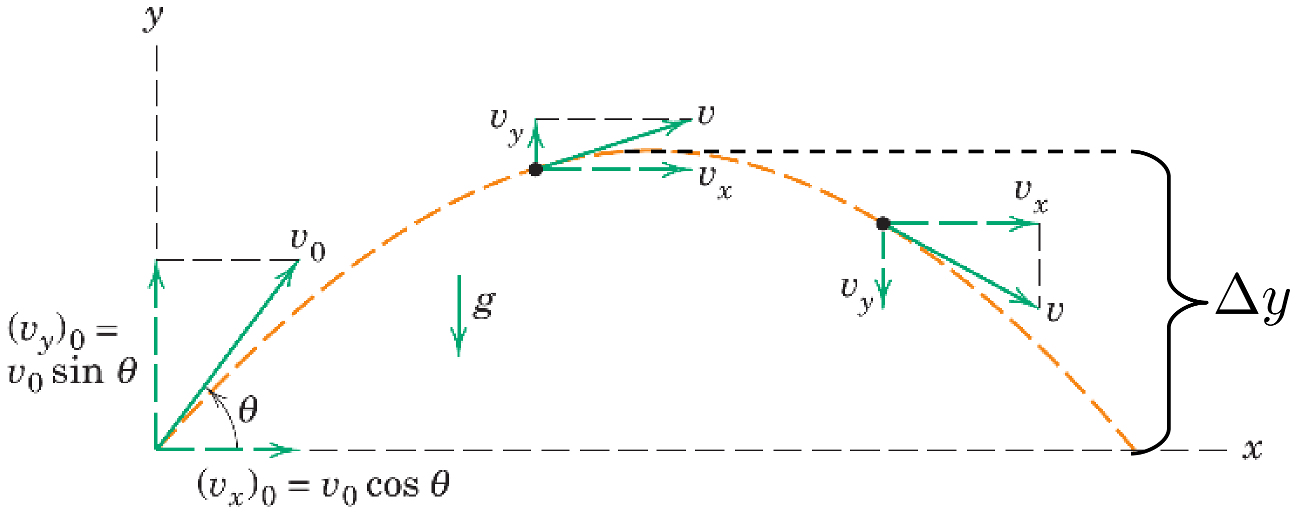
$v_y = 0$ en el punto de **altura máxima**

$$y_0 = 0$$

La altura alcanzada es:

$$\boxed{\Delta y = \frac{v_{y,0}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

- Si $\theta = 0$, entonces $\Delta y = 0$. La partícula se mantiene en el suelo.
- Por otro lado, la altura es máxima para $\theta = 90°$.



Ejemplo 1: Lanzamiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?

Primero obtenemos el tiempo que toma volver a tocar el suelo:

$$y = y_0 + v_{y,0}\, t - gt^2/2$$

$y_0 = 0$

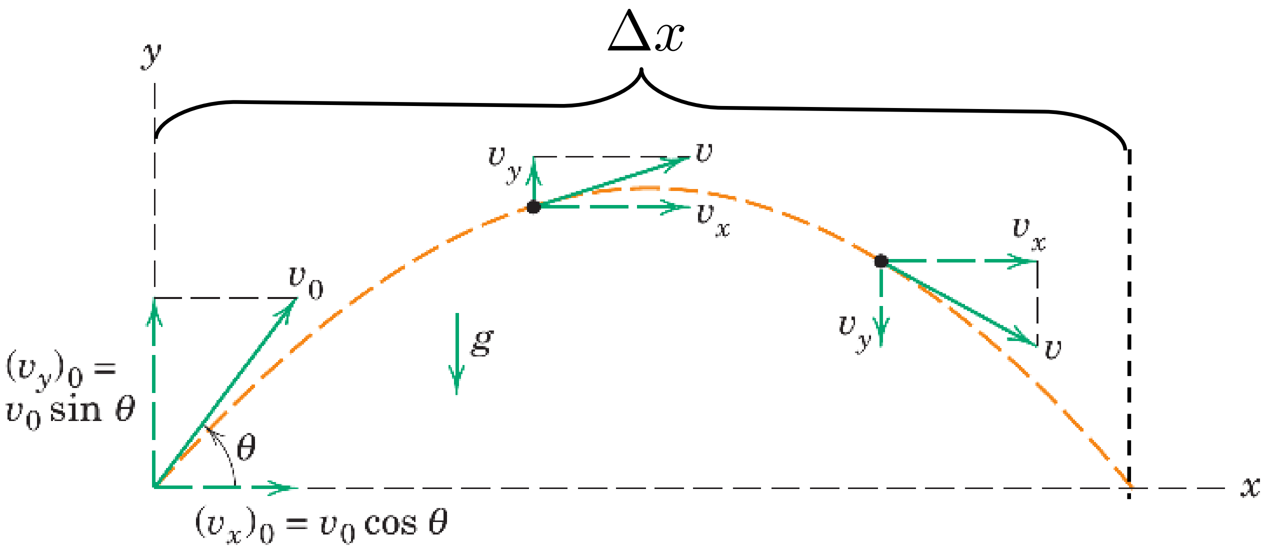
$y=0$ cuando vuelve a tocar el suelo

$$\longrightarrow \quad \Delta t = \frac{2v_{y,0}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Ahora utlizamos la trayectoria horizontal:

$$x = x_0 + v_{x,0}\, t$$

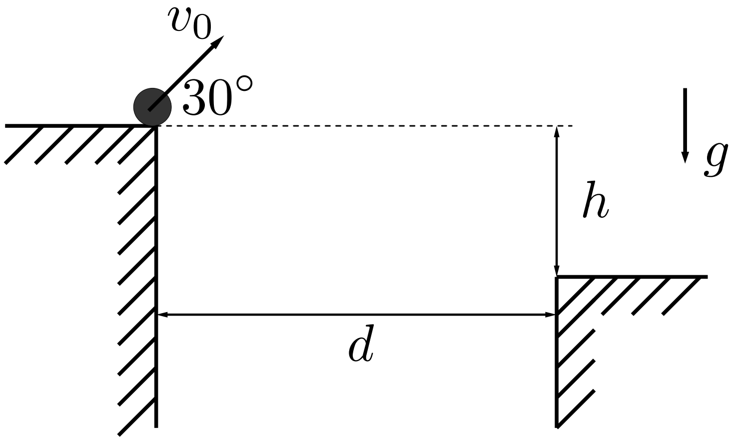
$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta x = v_{x,0}\, \Delta t = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$



- Si $\theta=90°$, entonces $\Delta x=0$. La partícula es lanzada verticalmente.

Ejemplo 2

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez** v_0 y un **ángulo** de 30° con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.



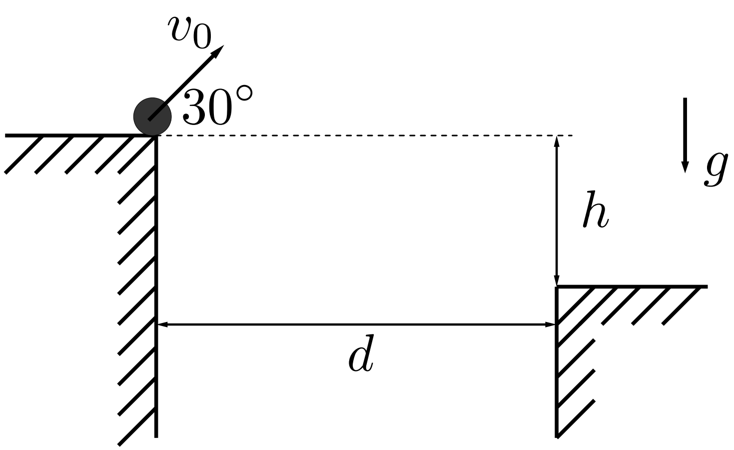
Ejemplo 2

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez** v_0 y un **ángulo** de 30° con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.

Utilizamos las ecuaciones del lanzamiento de un proyectil:

$$\underbrace{x}_{d} = \overset{0}{\cancel{x_0}} + \underbrace{v_{x,0}}_{v_0 \cos 30^\circ = v0\frac{\sqrt{3}}{2}}\, t^*$$

$$\underbrace{y}_{-h} = \overset{0}{\cancel{y_0}} + \underbrace{v_{y,0}}_{v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2}}\, t^* - g t^{*2}/2$$



Tenemos dos incógnitas, v_0 y t. Primero despejamos el tiempo.

$$t^* = \frac{2d}{v_0\sqrt{3}}$$

Ahora remplazamos *t* en la ecuación para *y*, y obtenemos la rapidez mínima:

$$\boxed{v_0 = d\sqrt{\frac{2g}{3(h + d/\sqrt{3})}}}$$

Estrategia de resolución de problemas

1) Imponer condiciones de MUA para las coordenadas x $(a_x = 0)$ e y $(a_y = -g)$.
2) Identificar datos conocidos y remplazarlos en las ecuaciones.
3) Resolver sistema de ecuaciones y despejar variables desconocidas.

Clase 9 & 10

- Clase 9:
  - Vectores en 2D.
  - Movimiento parabólico.
- Clase 10:
  - **Movimiento circular.**

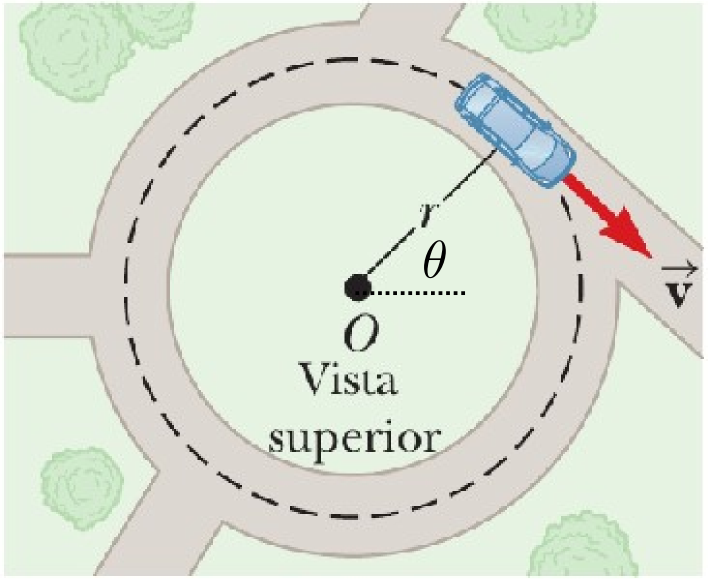
Movimiento circular

- El **movimiento circular** es aquel donde una partícula se mueve en un **plano** y a una **distancia constante** r desde un **eje**.

- Sólo el **ángulo** θ cambia en el tiempo, el cual se mide en **radianes** (rad).

- La **longitud recorrida** d luego de rotar un ángulo $\Delta\theta$ es:

$$d = r\Delta\theta.$$



Movimiento circular uniforme

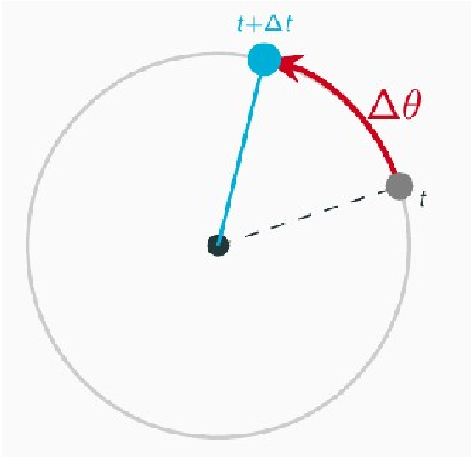
- Un **movimiento circular uniforme** es aquel donde la **rapidez** v es **constante**.
- Esta rapidez usualmente la escribimos como

$$\boxed{v = r\omega,}$$

donde r es el **radio** del círculo y ω es la **velocidad angular**.

- La **velocidad angular** dicta el **cambio** del **ángulo en el tiempo**:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$



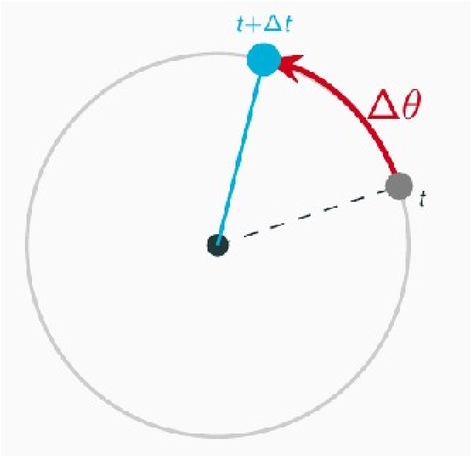
Movimiento circular uniforme

- La velocidad angular se mide en $\mathrm{rad/s}$.
- La **velocidad angular** nos dice **qué tan rápido gira** una partícula.
- El **período** está dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- Entonces, la **frecuencia**:

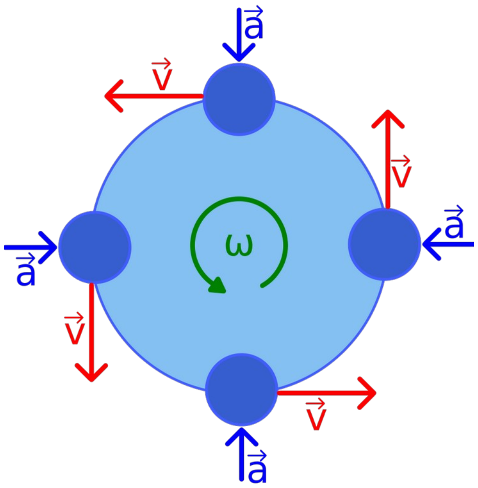
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

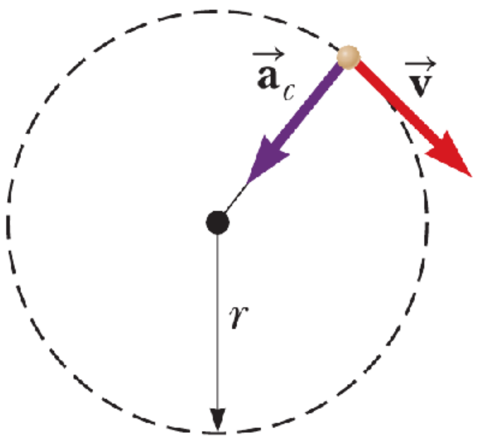


$$\omega = v/r$$

Movimiento circular uniforme

- De manera poco intuitiva, en un movimiento circular uniforme **la aceleración no es constante**.
- Esto es porque, a pesar que la rapidez es constante, la **velocidad cambia de dirección**.





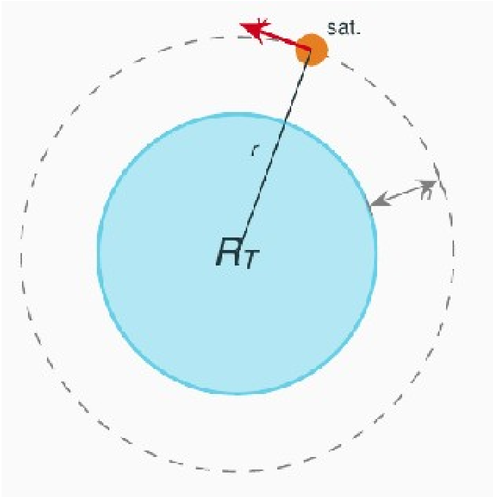
- En un movimiento circular uniforme, la **aceleración apunta hacia el centro**.
- Esta aceleración se llama **centrípeta** y tiene una magnitud de

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.}$$

*Notar que el módulo de la aceleración centrípeta sí es constate. Sin embargo su dirección cambia.

Ejemplo 3:

- Un **satélite** orbita la Tierra a una **altura** $h{=}400\ \mathrm{km}$ **sobre la superficie**. **Radio terrestre** $R_T{=}6371\ \mathrm{km}$, período $T{=}92.5\ \mathrm{min}$.
  - Calcule la **velocidad angular**.
  - Calcule la **rapidez**.
  - Calcule la **aceleración centrípeta**.

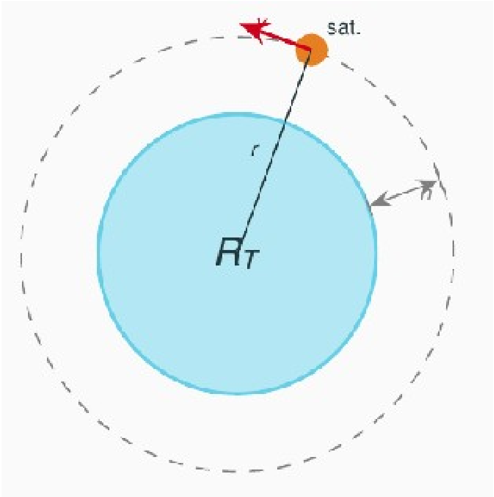


Ejemplo 3:

- Un **satélite** orbita la Tierra a una **altura** h=400 km **sobre la superficie**. **Radio terrestre** R_T=6371 km, período T=92.5 min.
  - Calcule la **velocidad angular**.

Primero calculamos el radio de rotación:

$$\begin{aligned} r &= h + R_T \\ &= 400 \text{ km} + 6371 \text{ km} \\ &= 6771 \text{ km} \end{aligned}$$



Para obtener la velocidad angular, utilizamos el período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Pasamos el período a segundos:

$$T = 92.5\text{min}\,\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 5500 \text{ s}$$

Entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{5500 \text{ s}} \boxed{= 1.13 \times 10^{-3} \text{ rad/s}}$$

Ejemplo 3:

- Un **satélite** orbita la Tierra a una **altura** h=$400\ \mathrm{km}$ **sobre la superficie**. **Radio terrestre** R_T=$6371\ \mathrm{km}$, período T=$92.5\ \mathrm{min}$.
  - Calcule la **rapidez**.

Primero escribimos el radio en metros:

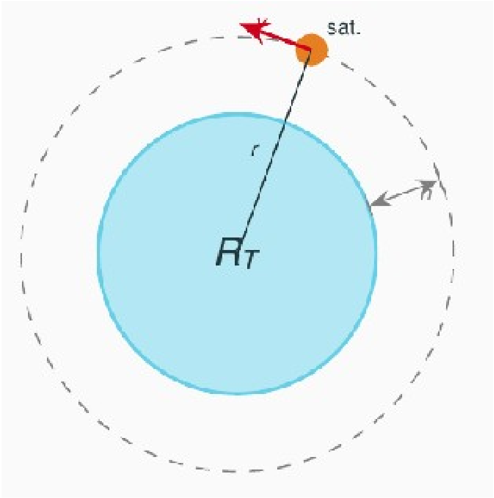
$$r = 6771 \times 10^3\ \mathrm{m}$$

Entonces, la velocidad en m/s es:

$$v = r\omega$$

$$= 6771 \times 10^3\ \mathrm{m}\, 1.13 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad/s}$$

$$\boxed{\approx 7651\ \mathrm{m/s}}$$

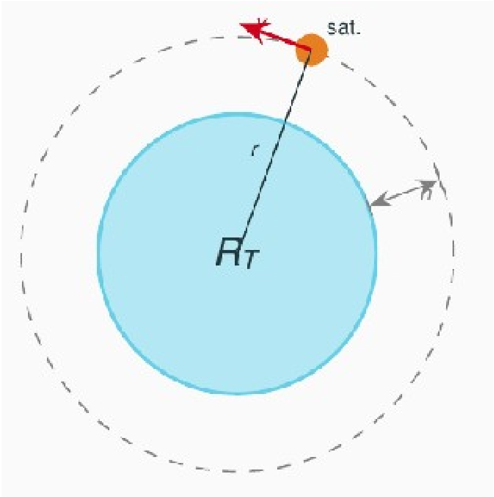


Ejemplo 3:

- Un **satélite** orbita la Tierra a una **altura** $h=400\ \mathrm{km}$ **sobre la superficie**. **Radio terrestre** $R_T=6371\ \mathrm{km}$, período $T=92.5\ \mathrm{min}$.
  - Calcule la **aceleración centrípeta**.

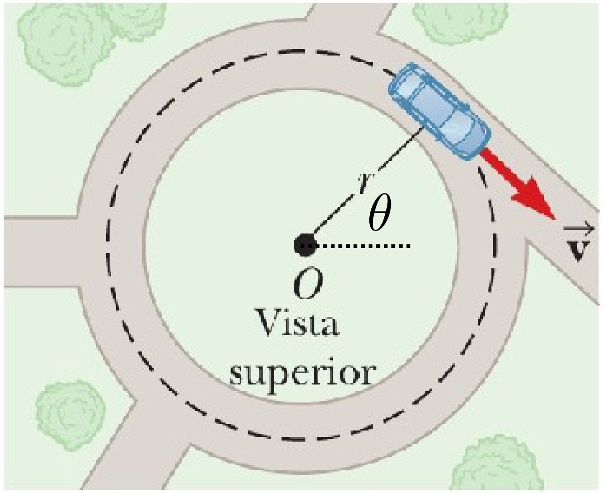
La aceleración centrípeta sale directamente de su fórmula:

$$\begin{aligned}\alpha &= r\omega^2 \\ &= 6771\times 10^3\ \mathrm{m}\,(1.13\times 10^{-3}\ \mathrm{rad/s})^2 \\ &\boxed{\approx 8.65\ \mathrm{m/s}^2}\end{aligned}$$



Movimiento circular no uniforme

- En un **movimiento circular no uniforme** el **radio** r permanece **constante**, pero la **velocidad angular** ω **cambia**.



$$r = \text{cte.}, \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

- Por tanto, el sistema tiene una **aceleración angular**:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Movimiento circular no uniforme

- Si la **aceleración angular** α es **constante**, entonces la cinemática está dictada por las siguientes ecuaciones:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t\,,$$

$$\frac{\omega_f^2}{2} = \frac{\omega_i^2}{2} + \alpha(\theta_f - \theta_i)\,,$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i\, t + \frac{1}{2}\alpha t^2\,. \qquad \alpha = \mathrm{cte.}$$

- Notar la analogía con las ecuaciones de MUA.

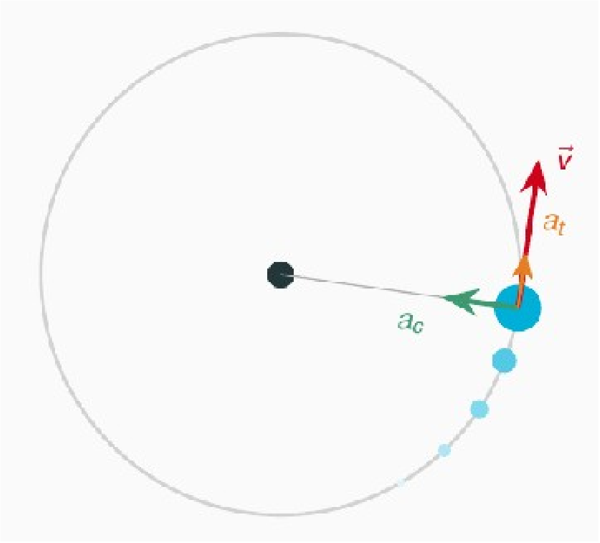
Movimiento circular no uniforme

- De forma general, en un **movimiento circular** la **aceleración** tiene **dos componentes**:
  - La **aceleración centrípeta**, que apunta hacia el **centro**:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

  - La **aceleración tangencial,** que es **tangente** al **movimiento**:

$$a_t = r\alpha.$$



- Notar que en un movimiento circular uniforme $\alpha = 0$, entonces no hay aceleración tangencial.

Resumen

- El **lanzamiento de un proyectil** muestra un movimiento **parabólico** en un plano.
- Para describirlo es necesario trabajar con coordenadas en los ejes x e y.
- Los **movimientos circulares** operan a un **radio** r **constante**, y se definen por las **velocidades** y **aceleraciones angulares** ω y α, respectivamente.
- Próxima clase:
  - Control 1.
  - Leyes de Newton.