UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

FISICA I (FIS101)

Clase 18&19

Trabajo y energía

Felipe Isaule

Jueves 14 de Mayo de 2026

felipeisaule.github.io

felipe.isaule.r@edu.uai.cl

Clase 18 & 19

- Clase 18:
  - Trabajo y energía cinética.
  - Energía potencial y conservación de la energía.
- Clase 19:
  - Fuerzas conservativas y no conservativas.

- Bibliografía recomendada:
  - Serway (7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 8.1, 8.2, 8.3, 8.4).

Producto punto

- Antes de definir trabajo, recordamos la definición de **producto punto** entre dos vectores.
- Si tenemos dos vectores en cartesianas:

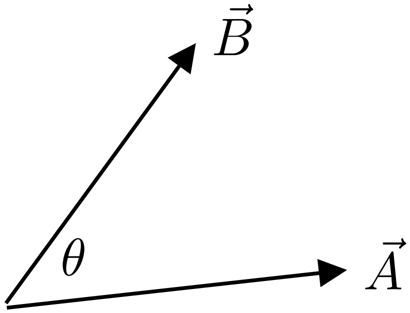
$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\,, \qquad \vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\,,$$

  el producto punto es un escalar y se define como:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$$

- También podemos escribir

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta.$$



- Notar que el **producto punto entre vectores ortogonales es cero**.

Clase 18 & 19

- <u>Clase 18:</u>
  - **Trabajo y energía cinética.**
  - Energía potencial y conservación de la energía.
- <u>Clase 19:</u>
  - Fuerzas conservativas y no conservativas.

- Bibliografía recomendada:
  - Serway (7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7).

Trabajo

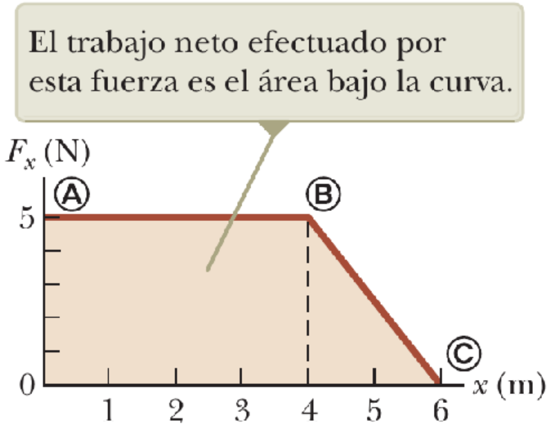
- El **trabajo** dW efectuado por una **fuerza** F aplicada a un cuerpo que se deplaza una **distancia** $d\vec{r}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Producto punto

- El trabajo realizado por una fuerza desde un punto *A* a uno *B*,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



- El trabajo es un **escalar**.
- Su unidad en el SI es el **Joule**,

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}.$$

Trabajo

- Cuando la **fuerza** es **constante**, el **trabajo** toma la siguiente forma:

$$\boxed{W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r},}$$

  donde Δr es el vector deplazamiento.

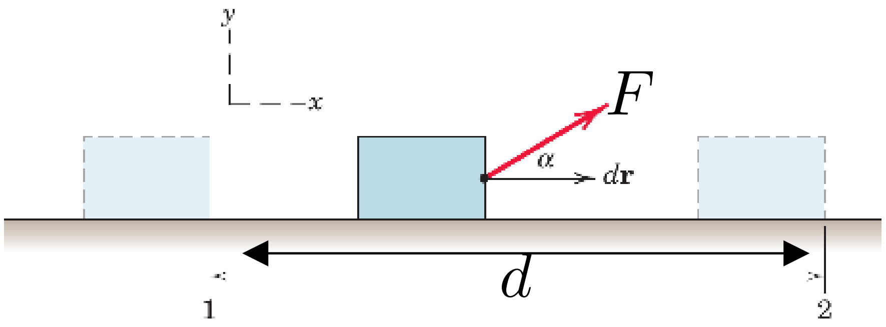
- Debido al producto punto, sólo los componentes de la fuerza **paralelos al desplazamiento** producen trabajo.

- En **coordenadas cartesianas**, tenemos que

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}\,.$$

  Entonces:

$$\boxed{W_{1\to 2} = F\cos\alpha(x_2 - x_1) = F\,d\cos\alpha.}$$



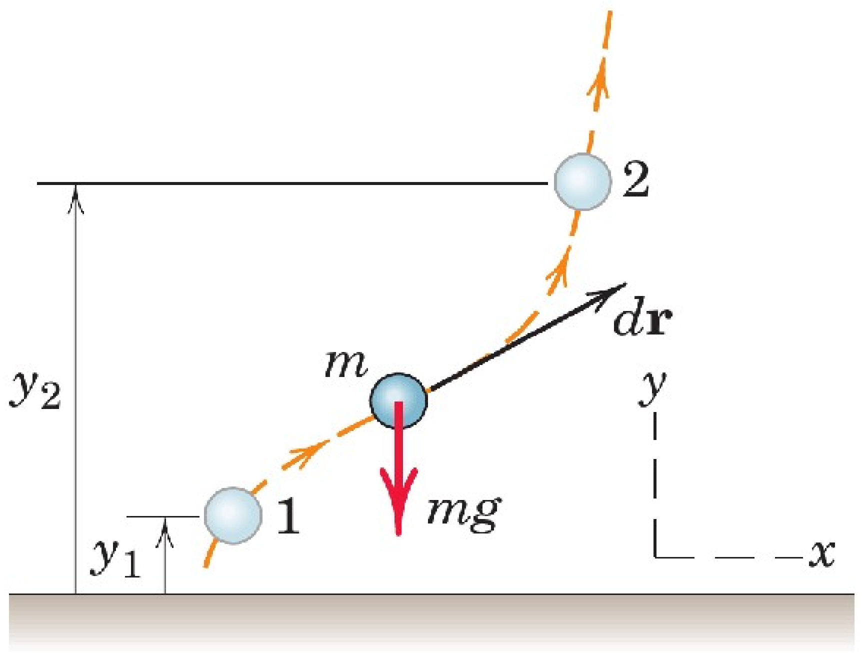
Trabajo debido al peso

- Si un cuepro de masa m cae en un plano a través de una trayectoria (ver figura), el trabajo debido al **peso** es:

$$W_{1\to 2} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -m\,g\,\Delta y = \boxed{-mg(y_2 - y_1)}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\,x\,\hat{i} + \Delta\,y\,\hat{j}$$

$$\vec{F} = -m\,g\,\hat{j}$$



- El **trabajo depende** sólo de la **diferencia de alturas**.

Trabajo producido por un resorte

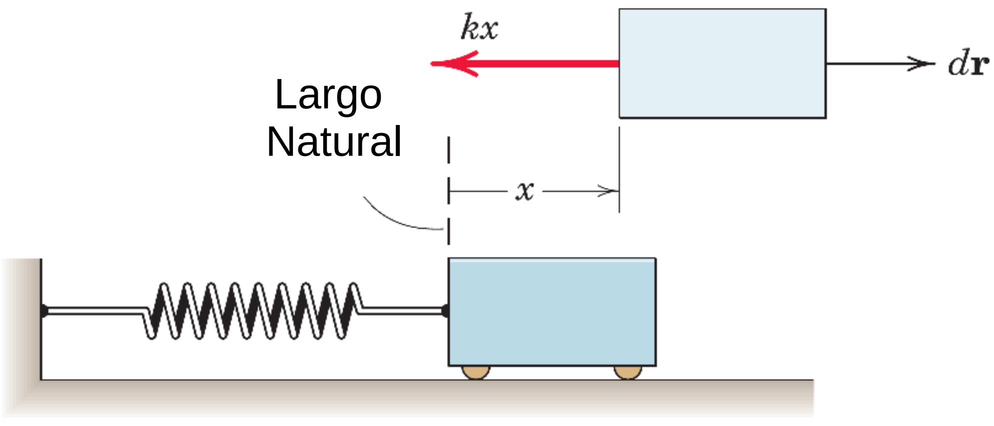
- Si se tiene un cuerpo atado a un **resorte** de constante elástica *k* como muestra la figura, el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx \boxed{= -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)}$$

$$d\vec{r} = d\,x\,\hat{i}$$

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{i}$$

- El **trabajo depende** sólo de las **posiciones iniciales y finales**.



Energía cinética

- Si consideramos **todas** las **fuerzas externas** aplicadas a un cuerpo, por la segunda ley de Netwon tenemos que:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

$$= m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}\,dt$$

$$= m\int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} d\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}\int_{v_A^2}^{v_B^2} dv^2$$

$$\boxed{W_{A\to B} = \frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right)}$$

- El **trabajo total realizado** entre dos puntos **depende** de la **diferencia entre los cuadrados de la rapidez**.

Energía cinética

- La **energía cinética** de un cuerpo en un instante es

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2.}$$

- El **trabajo total** realizado por un cuerpo entre dos instantes *A* y *B* es igual a la **diferencia entre las energías cinéticas**:

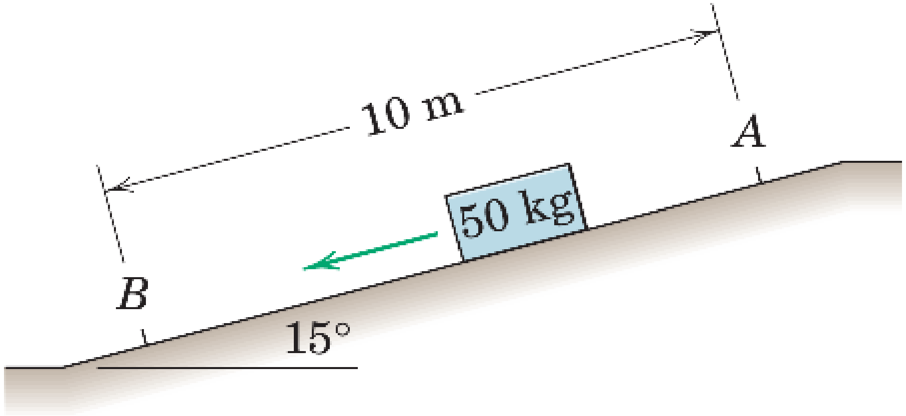
$$\boxed{W_{A\to B} = T_B - T_A,}$$

  que corresponde al **teorema de trabajo-energía cinética** de un cuerpo.

- Resolver problemas de dinámica utilizando esta ecuación se denomina el **método de trabajo-energía**.

Ejemplo 1:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

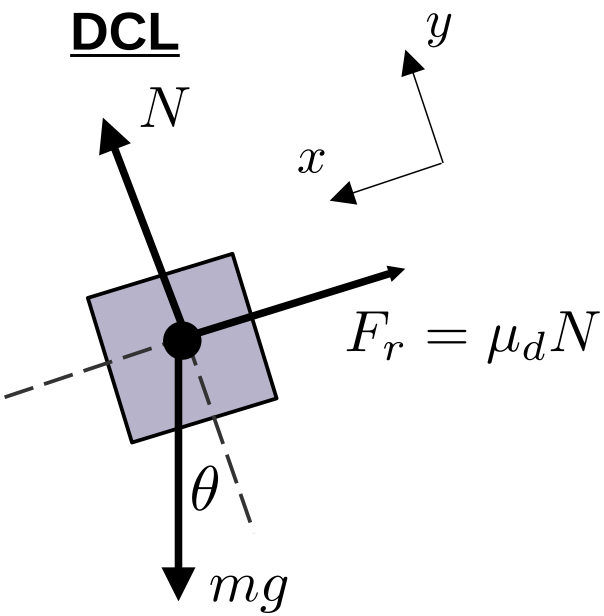


cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo 1:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

DCL



Fuerzas

$$\text{Peso}: \quad \vec{P} = mg\sin\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\text{Normal}: \quad \vec{N} = mg\cos\theta\,\hat{j}$$

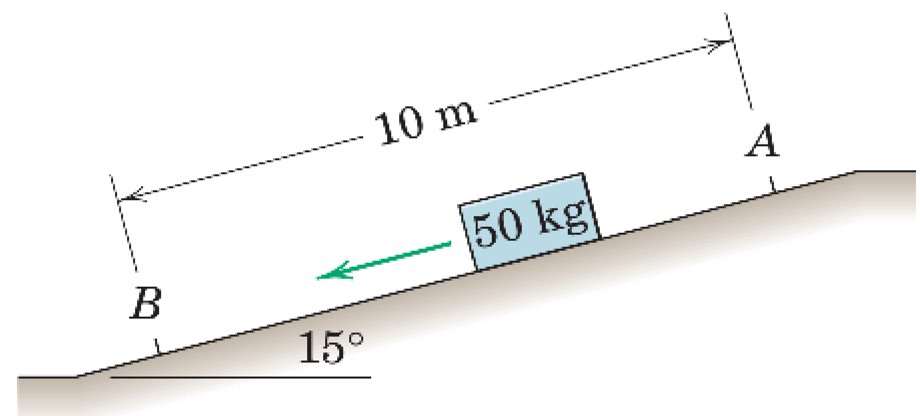
$$\text{Roce}: \quad F_r = -\mu_d m\,g\,\cos\theta\,\hat{i}$$

Debido a que el desplazamiento es en x, sólo el roce y el componente en x del peso contribuyen al trabajo.

Ecuaciones de movimiento

$$x: \quad F_x = mg\sin\theta - \mu_d N = ma_x$$

$$y: \quad F_y = N - mg\cos\theta = 0$$



cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo 1:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A\!=\!4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d\!=\!0.30$.

Trabajo

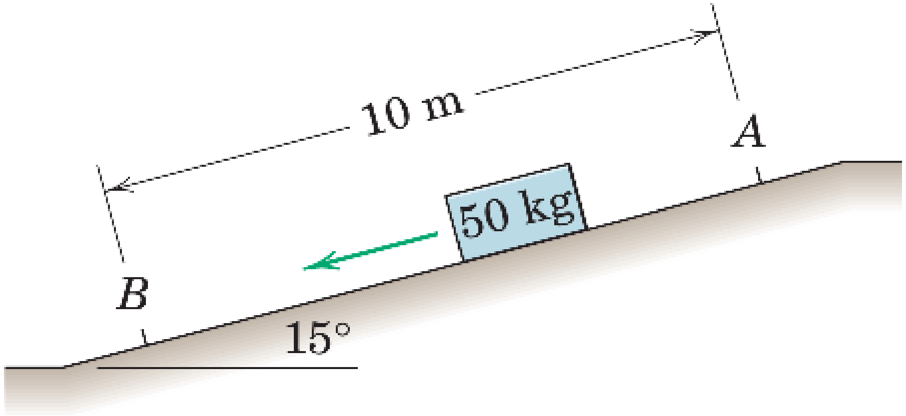
El trabajo realizado entre *A* y *B*:

$$W_{A\to B} = \vec{F}_{\text{total}} \cdot \Delta\vec{r} = (\overbrace{mg\sin\theta}^{\text{Componente en x del peso}} \overbrace{- \mu_d mg\cos\theta}^{\text{Roce}})(x_B - x_A)$$

$$= mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)(x_B - x_A)$$

$$= -151.9\ \mathrm{J}$$

$x_A = 0$
$x_B = 10\ \mathrm{m}$



cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo 1:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es v_A=$4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de μ_d=0.30.

Trabajo

$$W_{A\to B} = -151.9\ \mathrm{J}$$

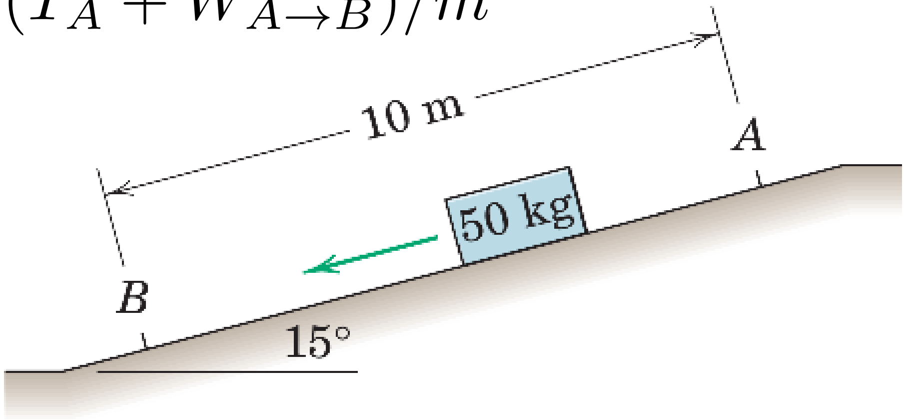
Energía cinética

$$T_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = 400\ \mathrm{J}$$

Ecuación trabajo-energía

$$W_{A\to B} = T_B - T_A \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2(T_A + W_{A\to B})/m}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_B = 3.15\ \mathrm{m/s}}$$



cos(15°)~0.97   sin(15°)~0.26

Ventajas del método de trabajo-energía

- El ejemplo anterior se podría haber resuelto utilizando leyes de Newton y cinemática.
- Sin embargo, para obtener la rapidez tendríamos que haber resuelto integrales para resolver la cinemática.
- El método de trabajo-energía **permite resolver problemas sin tener que integrar la aceleración**.

Clase 18 & 19

- Clase 18:
  - Trabajo y energía cinética.
  - **Energía potencial y conservación de la energía.**
- Clase 19:
  - Fuerzas conservativas y no conservativas.

- Bibliografía recomendada:
  - Serway (7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7).

Energía potencial gravitatoria (peso)

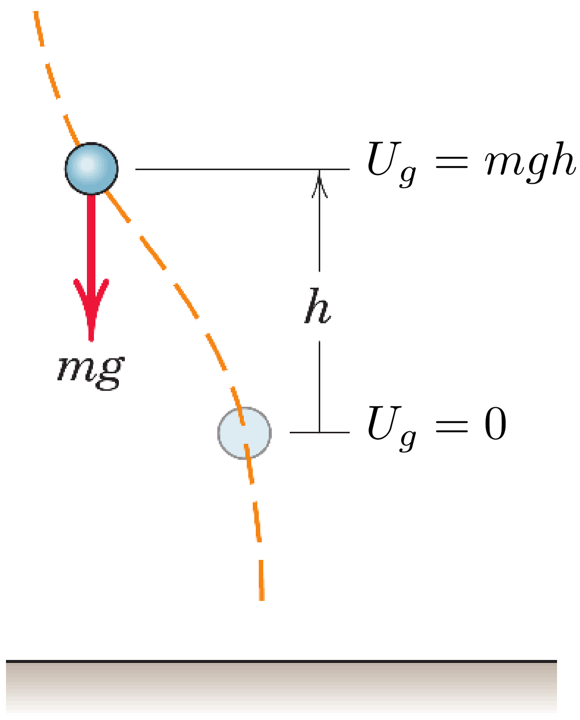
- El trabajo producido por el peso entre dos alturas y_A e y_B es:

$$W_{A\to B} = -mg(y_B - y_A).$$

- Lo que motiva la definición de **energía potencial gravitatoria**

$$\boxed{U_g = m\,g\,h,}$$

donde h es la **altura** a la que está el cuerpo.



- Esta altura es definida desde un **punto de referencia**.

- La elección de este punto de referencia no es importante, ya que sólo **nos interesan** las **diferencias de energía**.

$$\boxed{\Delta U_g = m\,g\,(h_B - h_A).}$$

Energía potencial elástica

- Obtuvimos que el trabajo producido por un resorte entre dos puntos x_A e x_B es:

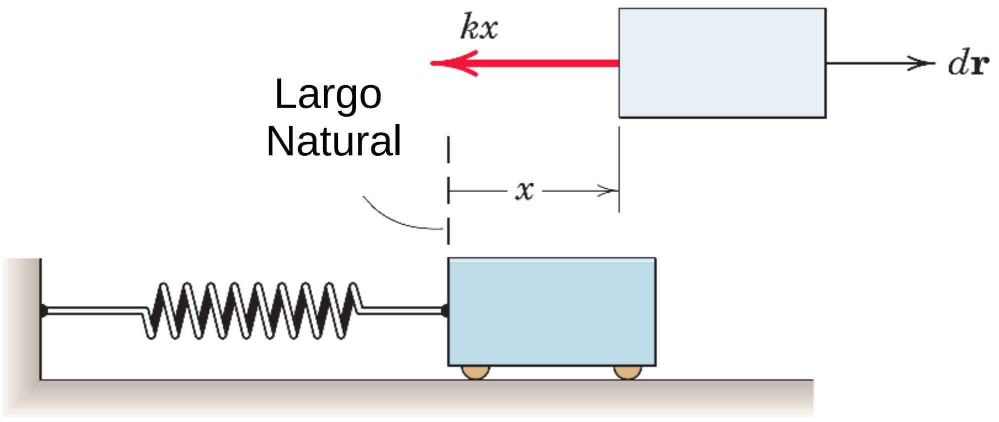
$$W_{A\to B} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2).$$

- Lo que motiva la definición de **energía potencial elástica**

$$\boxed{U_e = \frac{k}{2}x^2.}$$

- Esta distancia está definida **desde el punto de equilibrio**.

- Recordar tener cuidado si se usa un sistema de referencia que no parte del punto de equilibrio del resorte.



Ecuación de trabajo-energía

- Cuando tenemos fuerzas que generan energía potencial, la **ecuación de trabajo-energía** toma la forma

$$\boxed{W'_{A\to B} = \Delta T + \Delta U,}$$

$$\Delta T = T_B - T_A$$
$$\Delta U = U_B - U_A$$

donde W' es el trabajo realizado por fuerzas **sin** energía potencial, y ΔU considera todas las energías potenciales presentes.

- Usualmente escribimos esta ecuación como

$$\boxed{T_A + U_A + W'_{A\to B} = T_B + U_B.}$$

- ✗ En este curso sólo consideramos fuerzas potenciales gravitacionales (peso) y elásticas.

Conservación de la energía

- En problemas donde **sólo hay** fuerzas con **energía potencial** o que **no generan trabajo**, la ecuación trabajo-energía se simplifica

$$\boxed{T_A + U_A = T_B + U_B,}$$

  que corresponde a la ecuación de **conservación de la energía**.

- Definimos la **energía mecánica total** en un instante como

$$\boxed{E = T + U,}$$

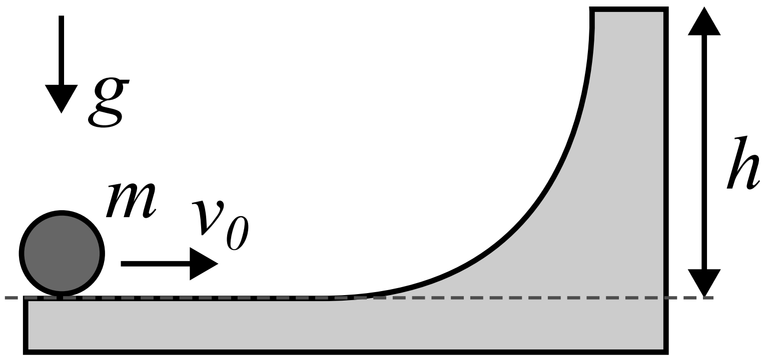
  es decir, la suma de la energía cinética y potencial.

- Entonces, cuando hay conservación de la energía

$$E_A = E_B.$$

Ejemplo 2:

- Una esfera de **masa** m es lanzada horizontalmente con una **rapidez** $v_0 > (2gh)^{1/2}$ hacia una rampa sin roce como muestra la figura. Considerando que la rampa alcanza una altura h, encuentre:
  - La **rapidez** con que **sale de la rampa**.
  - La **altura máxima** que alcanza.



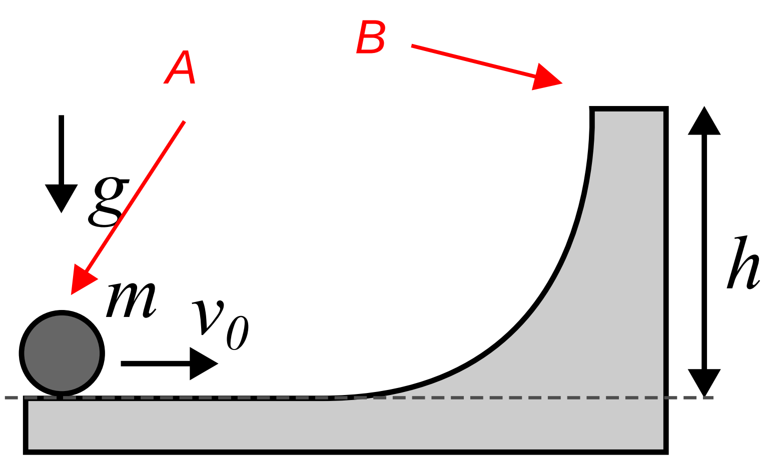
Ejemplo 2:

- Una esfera de **masa** m es lanzada horizontalmente con una **rapidez** $v_0 > (2gh)^{1/2}$ hacia una rampa sin roce como muestra la figura. Considerando que la rampa alcanza una altura h, encuentre:
  - La **rapidez** con que **sale de la rampa**.

Por conservación de la energía:

$$T_A + U_A = T_B + U_B \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gh}}$$



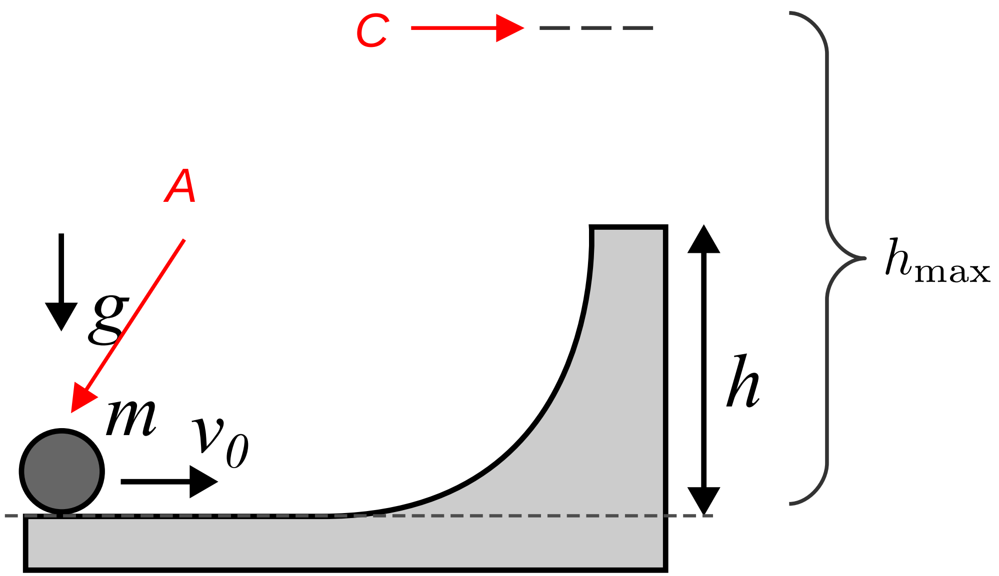
*Para salir de la rampa es necesaria una rapidez inicial de $v_0 > 2gh$.

Ejemplo 2:

- Una esfera de **masa** m es lanzada horizontalmente con una **rapidez** $v_0 > (2gh)^{1/2}$ hacia una rampa sin roce como muestra la figura. Considerando que la rampa alcanza una altura h, encuentre:
  - La **altura máxima** que alcanza.

Por conservación de la energía:

$$T_A + U_A = T_C + U_C \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{\max}$$



$$\boxed{h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

* El resultado no depende de la forma de la rampa.

Receta del método de trabajo-energía

1) Identificar los **puntos iniciales y finales** del movimiento.

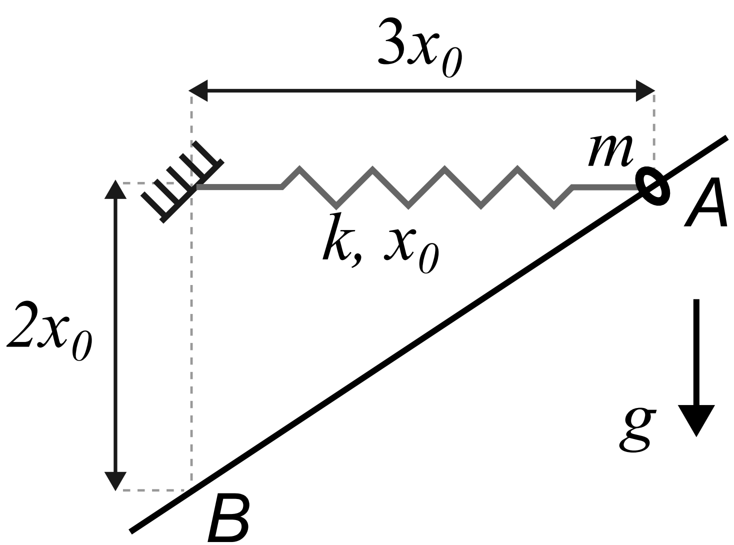
2) Identificar las **fuerzas**, o componentes de las fuerzas, que **realizan trabajo**.

3) Calcular el **trabajo realizado**, **energías potenciales** y/o las **energías cinéticas** en los puntos iniciales y finales.

4) Despejar las **incógnitas**.

Ejemplo 3:

- Una argolla de **masa** m se encuentra pegada a un resorte de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 como muestra la figura. Si la argolla es soltada desde el **reposo** desde el punto *A*, encuentre la rapidez de la argolla en el punto B.

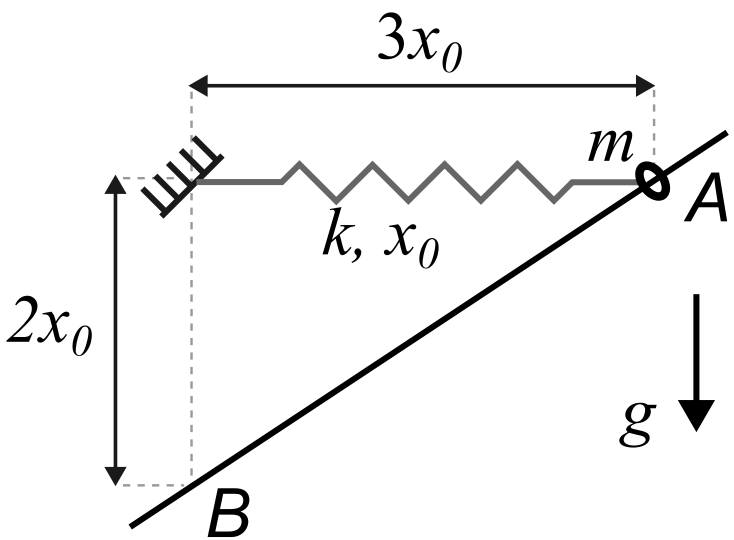


Ejemplo 3:

- Una argolla de **masa** m se encuentra pegada a un resorte de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 como muestra la figura. Si la argolla es soltada desde el **reposo** desde el punto *A*, encuentre la rapidez de la argolla en el punto B.

Por conservación de la energía:

$$T_A + U_A = T_B + U_B \qquad \longrightarrow \qquad 2mgx_0 + \frac{k}{2}(2x_0)^2 = \frac{m}{2}v_B^2 + \frac{k}{2}x_0^2$$



$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\left(2mgx_0 + \frac{3}{2}kx_0^2\right)}}$$

Clase 18 & 19

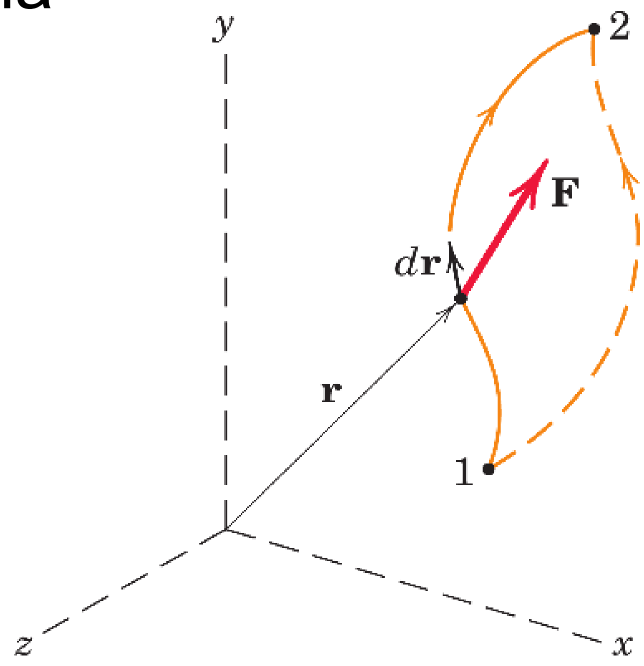
- Clase 18:
  - Trabajo y energía cinética.
  - Energía potencial y conservación de la energía.
- Clase 19:
  - **Fuerzas conservativas y no conservativas.**

- Bibliografía recomendada:
  - Serway (7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7).

Fuerzas conservativas

- ¿Cuándo una fuerza tiene una energía potencial asociada?
- Llamamos **fuerza conservativa** a una fuerza que genera el mismo trabajo independiente de la trayectoria.
- Podemos definir la energía potencial de una fuerza conservativa a partir del trabajo

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(U_B - U_A) = \Delta U.$$



Fuerzas de roce y disipación

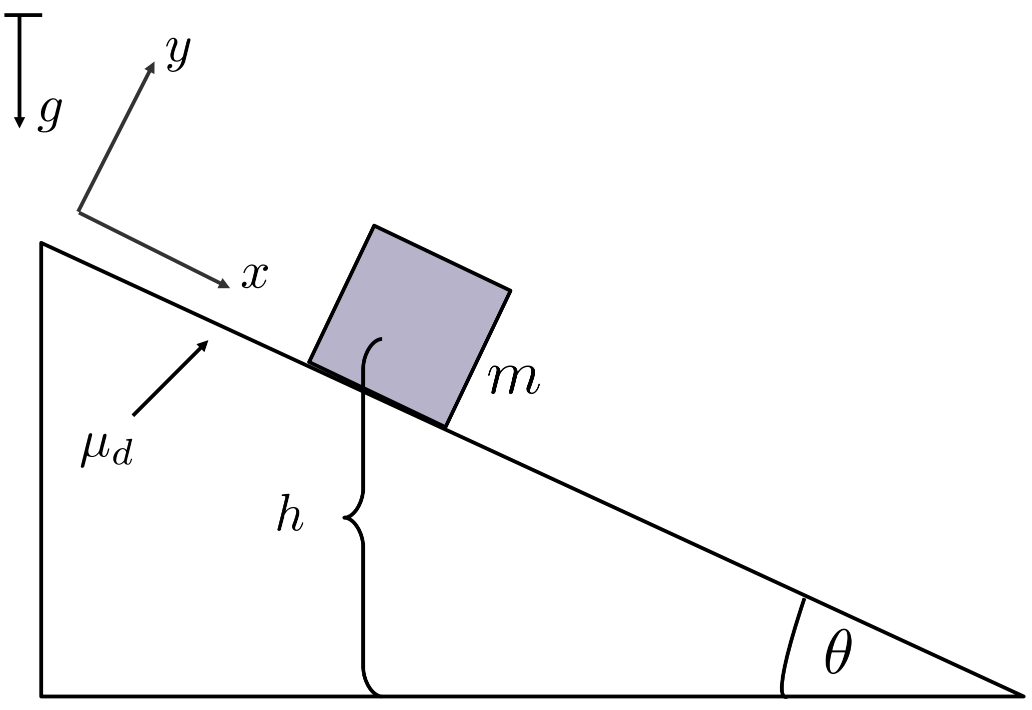
- Las fuerzas de **roce** son **no conservativas**.
- Por lo tanto debemos calcular su trabajo para incluírlas en la ecuación de trabajo-energía:

$$T_A + U_A + W'_{\text{roce}} = T_B + U_B.$$

- Podemos entender el trabajo producido por el roce como **disipación**.
- Es decir, **la energía no se conserva**, ya que debido al **roce** se **disipa parte de la energía**.

Ejemplo 4:

- Un bloque de **masa** m se encuentra en un **plano inclinado** con **constante de roce dinámico** μ_d. Si el bloque **comienza a deslizar** cuando está a una **altura** h respecto a la horizontal, calcule la **rapidez** con que llega a la parte inferior del plano inclinado.

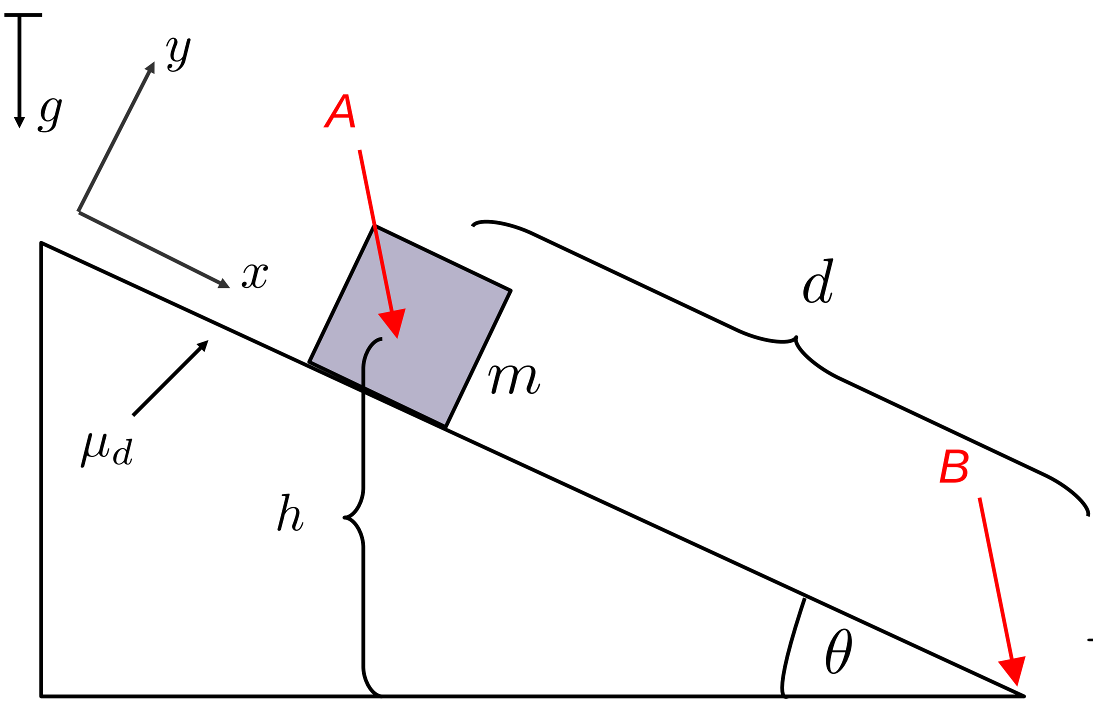


Ejemplo 4:

- Un bloque de **masa** m se encuentra en un **plano inclinado** con **constante de roce dinámico** μ_d. Si el bloque **comienza a deslizar** cuando está a una **altura** h respecto a la horizontal, calcule la **rapidez** con que llega a la parte inferior del plano inclinado.

Ecuación trabajo-energía:

$$T_A + U_A + W'_{\mathrm{roce}} = T_B + U_B$$



Calculamos cada término:

$$T_A = 0, \quad T_B = \frac{m}{2} v_B^2.$$

$$U_A = mgh, \quad U_B = 0.$$

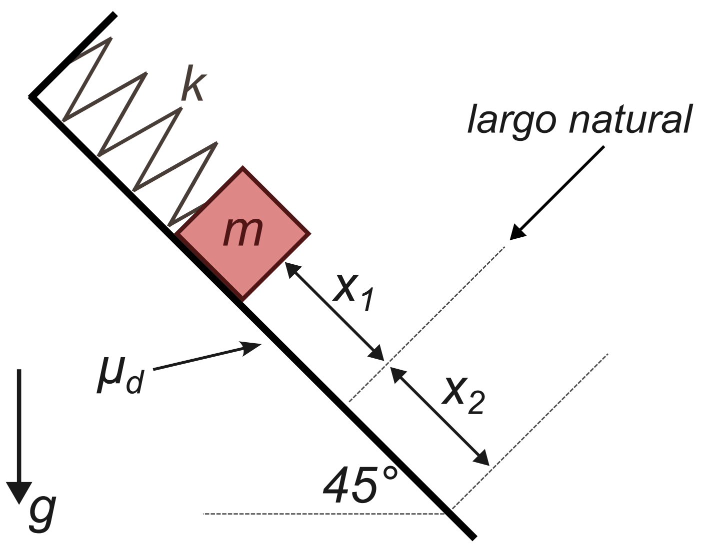
$$W'_{\mathrm{roce}} = F_r d = -\mu_d N d$$
$$= -mgd\mu_d \cos\theta$$

Por trigonometría: $d = h/\sin\theta$

$$\longrightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh(1-\mu_d \cot\theta)}}$$

Ejemplo 5:

- Un bloque de **masa** m se encuentra unido a un **resorte** de **constante elástica** k. El bloque se encuentra además en un **plano inclinado** que forma un **ángulo de 45°** con la horizontal y que posee un **coeficiente de roce dinámico** μ_d. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando está comprimido una distancia x_1 desde el largo natural (instante 1) para luego alcanzar una **elongación máxima** x_2 (instante 2), encuentre:
  - Las energías **cinéticas** y **potenciales** en los instantes 1 y 2.
  - El **trabajo realizado** por la **fuerza de roce** entre los instantes 1 y 2.
  - La **elongación** x_2 en función de los otros parámetros del problema.

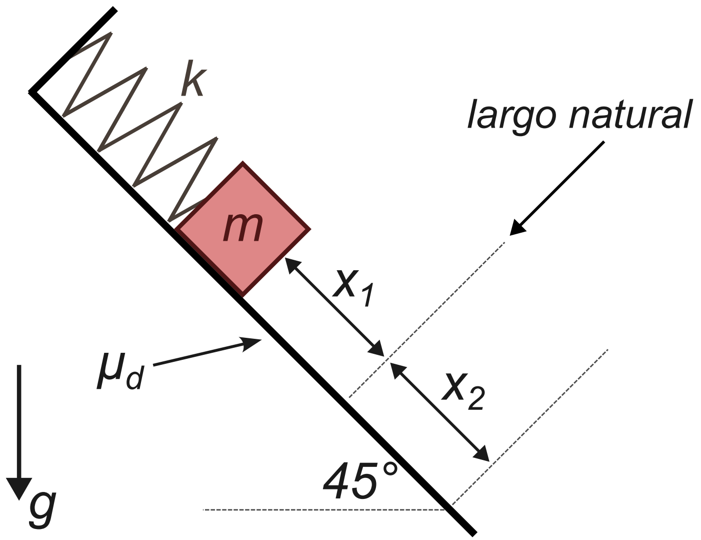


Ejemplo 5:

- Un bloque de **masa** m se encuentra unido a un **resorte** de **constante elástica** k. El bloque se encuentra además en un **plano inclinado** que forma un **ángulo de 45°** con la horizontal y que posee un **coeficiente de roce dinámico** μ_d. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando está comprimido una distancia x_1 desde el largo natural (instante 1) para luego alcanzar una **elongación máxima** x_2 (instante 2), encuentre:
  - Las energías **cinéticas** y **potenciales** en los instantes 1 y 2.

En ambos instantes la velocidad es cero:

$$\boxed{T_1 = T_2 = 0}$$



Las energías potenciales elásticas son directamente:

$$\boxed{U_{e,1} = \frac{k}{2}x_1^2 \qquad U_{e,2} = \frac{k}{2}x_2^2}$$

Si escogemos la altura cero en el instante 2:

$$\boxed{U_{g,2} = 0}$$

La altura en el instante 1:

$$h_1 = (x_1 + x_2)\sin 45^\circ = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 5:

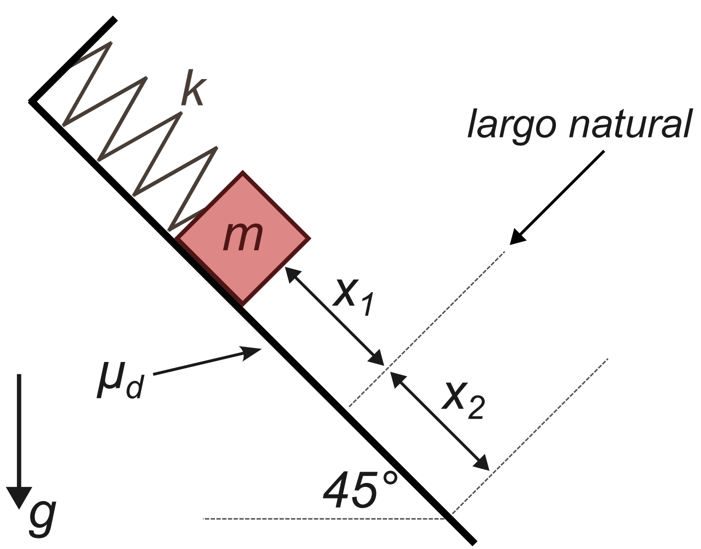
- Un bloque de **masa** m se encuentra unido a un **resorte** de **constante elástica** k. El bloque se encuentra además en un **plano inclinado** que forma un **ángulo de 45°** con la horizontal y que posee un **coeficiente de roce dinámico** μ_d. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando está comprimido una distancia x_1 desde el largo natural (instante 1) para luego alcanzar una **elongación máxima** x_2 (instante 2), encuentre:
  - Las energías **cinéticas** y **potenciales** en los instantes 1 y 2.

La altura en el instante 1:

$$h_1 = (x_1 + x_2)\sin 45° = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$

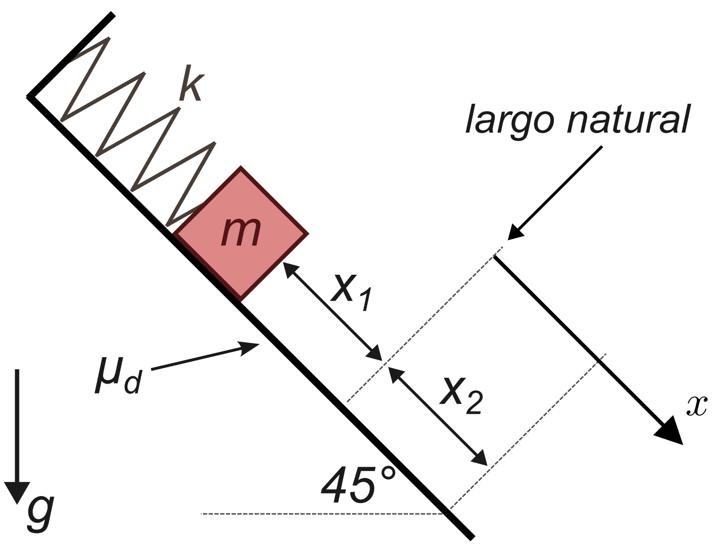
La energía potencial debido al peso en el instante 1:

$$\boxed{U_{g,1} = mg\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}}$$



Ejemplo 5:

- Un bloque de **masa** m se encuentra unido a un **resorte** de **constante elástica** k. El bloque se encuentra además en un **plano inclinado** que forma un **ángulo de 45°** con la horizontal y que posee un **coeficiente de roce dinámico** μ_d. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando está comprimido una distancia x_1 desde el largo natural (instante 1) para luego alcanzar una **elongación máxima** x_2 (instante 2), encuentre:
  - El **trabajo realizado** por la **fuerza de roce** entre los instantes 1 y 2.



La fuerza de roce:

$$\vec{F}_r = -\mu_d N \hat{i}$$

La normal:

$$N = mg\cos 45^\circ = mg/\sqrt{2}$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{F}_r = -\mu_d (mg/\sqrt{2})\hat{i}$$

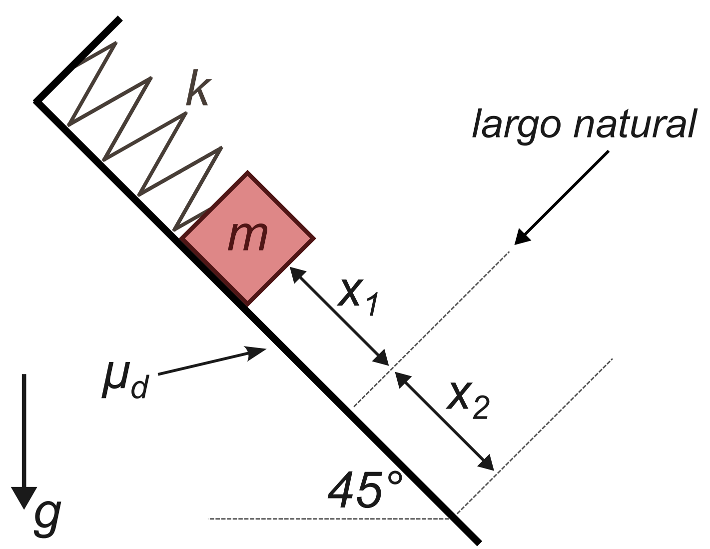
El trabajo:

$$W_{1\to 2} = \vec{F}_r \cdot \Delta x \hat{i} = -\frac{\mu_d m g}{\sqrt{2}}(x_2 - (-x_1))$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{W_{1\to 2} = -\frac{\mu_d m g}{\sqrt{2}}(x_2 + x_1)}$$

Ejemplo 5:

- Un bloque de **masa** m se encuentra unido a un **resorte** de **constante elástica** k. El bloque se encuentra además en un **plano inclinado** que forma un **ángulo de 45°** con la horizontal y que posee un **coeficiente de roce dinámico** μ_d. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando está comprimido una distancia x_1 desde el largo natural (instante 1) para luego alcanzar una **elongación máxima** x_2 (instante 2), encuentre:
  - La **elongación** x_2 en función de los otros parámetros del problema.



Utilizando trabajo-energía:

$$T_1 + U_1 + W_{1\to 2} = T_2 + U_2$$

$$\frac{k}{2}x_1^2 + \frac{mg(x_1+x_2)}{\sqrt{2}} - \frac{\mu_d mg(x_1+x_2)}{\sqrt{2}} = \frac{k}{2}x_2^2$$

$$\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2 + mg(1-\mu_d)\frac{(x_1+x_2)}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{k}{2}(x_1-x_2) + \frac{mg(1-\mu_d)}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x_2 = x_1 + \frac{2mg}{k\sqrt{2}}(1-\mu_d)}$$

Resumen

- Hemos definido el concepto de **trabajo** realizado por fuerzas.
- Hemos introducido los conceptos de **energía cinética** y **energía potencial**.
- Presentamos el método de **trabajo-energía** para resolver problemas de dinámica.
- Próxima clase:
  - Momentum lineal.